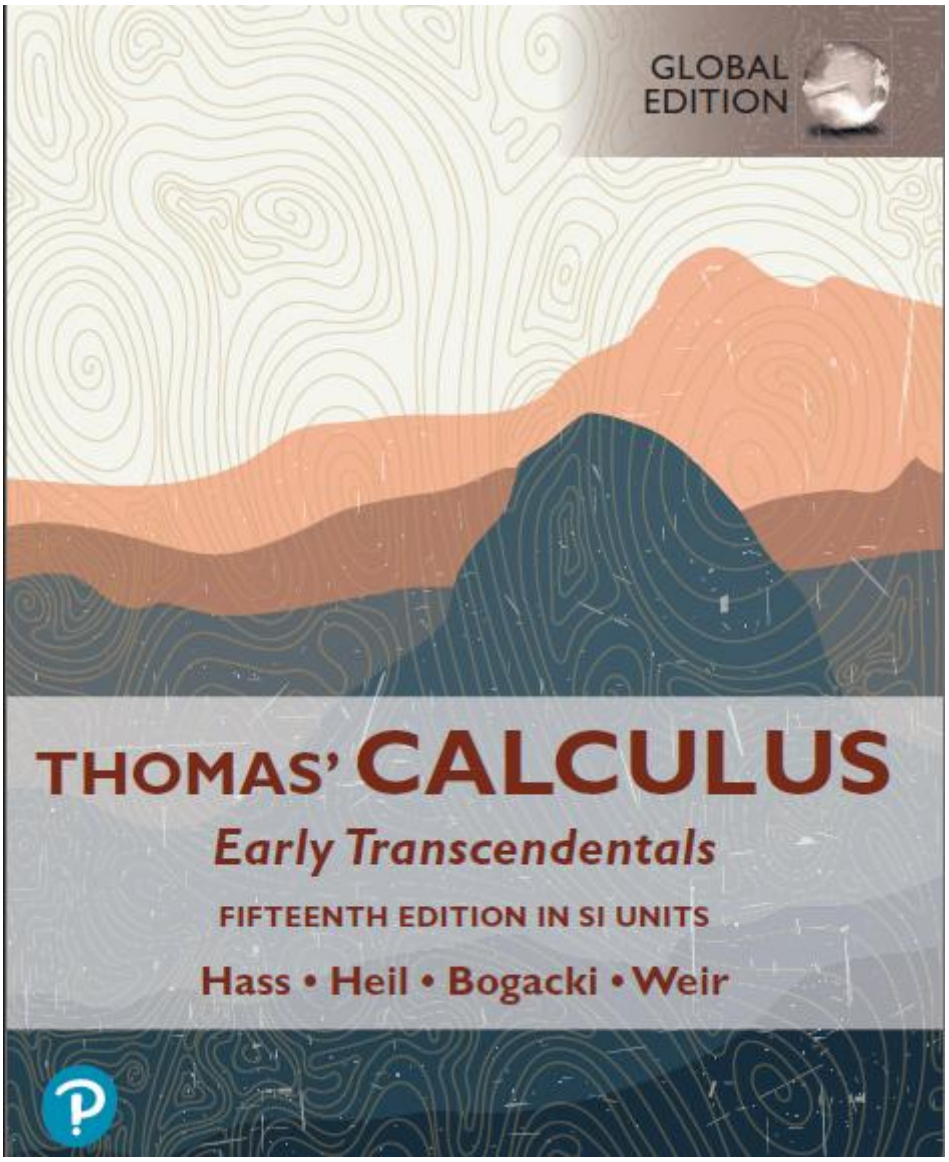
ÉNONCÉS D'EXERCICES ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS



Thomas' CALCULUS (15 ème édition)

Early transcendentals

Chapitre 11.1 : Paramétrisations de courbes dans le plan

Traduit et corrigé par L. Hardy

Exercice 11.1.1

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 3t\,;\, y = 9\,t^2\,;\, -\infty < t < \infty$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.2

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = -\sqrt{t}\,;\, y = t\,;\; t \geq 0$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.3

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 2t - 5\,;\, y = 4t - 7\,;\; -\infty < t < \infty$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.4

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 3 - 3t\,;\, y = 2t\,;\; 0 \leq\; t \leq\; 1$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.5

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = \cos 2t \ ; y = \sin 2t \ \ ; \ 0 \leq \ t \leq \pi$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.6

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = \cos(\pi - t) \ ; y = \sin(\pi - t) \ ; \ 0 \leq \ t \leq \pi$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.7

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 4 \cos t \ ; y = 2 \sin \ t \ \ ; \ 0 \leq \ t \leq 2\pi$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.8

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 4\sin t \ ; y = 5\cos\ t \ \ ; \ 0 \leq \ t \leq 2\pi$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.9

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = \sin t \ ; y = \ \cos\ 2t \ \ ; -\frac{\pi}{2} \leq \ t \leq \frac{\pi}{2}$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.10

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 1 + \sin t \ ; y = \ \cos t - 2 \ ; \ 0 \leq \ t \leq \pi$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.11

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = t^2 \ ; y = t^6 - 2t^4 \ ; \ -\infty < t < \infty$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.12

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = \frac{t}{t-1} \; ; y = \frac{t-2}{t+1} \; ; \; -1 < t < 1$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.13

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = t \; ; y = \sqrt{1-t^2} \; ; \; -1 \leq t \leq 0$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.14

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = \sqrt{t+1} \; ; y = \sqrt{t} \; ; \; t \geq 0$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.15

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = sec^2 t - 1 \ ; y = \tan t \ ; \ -\frac{\pi}{2} < \ t < \frac{\pi}{2}$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.16

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = -sec\, t \ \ ; y = \tan t \ ; \ -\frac{\pi}{2} < \ t < \frac{\pi}{2}$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.17

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = -\cosh t \ ; y = \sinh t \ ; \ -\infty < t < \infty$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

Correction détaillée

Exercice 11.1.18

On donne les équations paramétriques et les intervalles du paramètre :

$$x = 2\sinh t \ ; y = 2\cosh t \ ; \ -\infty < t < \infty$$

décrivant le mouvement d'une particule dans le plan xy. Déterminez la trajectoire de la particule en trouvant une équation cartésienne correspondante. Tracez le graphe de cette équation cartésienne (le tracé obtenu dépendra de l'équation utilisée). Indiquez la portion du graphe parcourue par la particule ainsi que le sens de son mouvement.

[Correction détaillée]

Exercice 11.1.19	11.1.20	11.1.21	11.1.22	11.1.23	11.1.24

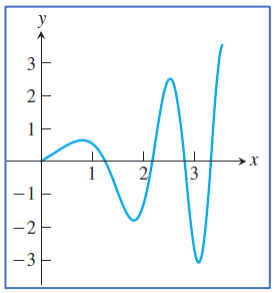
Voici 6 équations paramétriques :

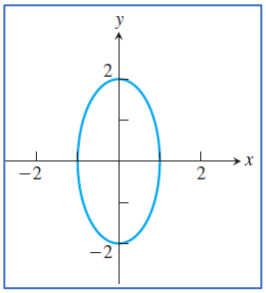
a) $x = 1 - \sin t \ ; \ y = 1 + \cos t$ b) $x = \cos t \ ; \ y = 2\sin t$

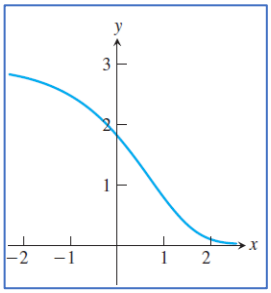
c) $x = \frac{1}{4}\, t\cos t \ ; y = \frac{1}{4} t\, sint$ d) $x = \sqrt{t} \ ; \ y = \sqrt{t}\cos(t)$

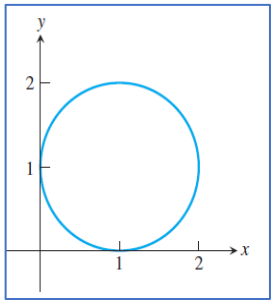
e) $x = \ln t \ ; \ y = 3\, e^{-\frac{t}{2}}$ f) $x = \cos t \ ; \ y = \sin 3t$

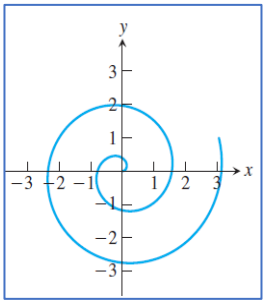
et voici 6 courbes paramétriques :

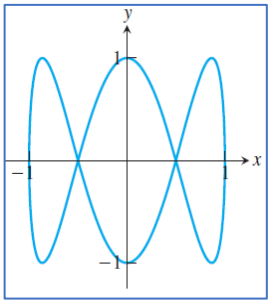
A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

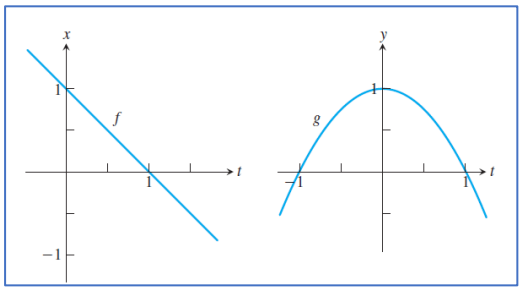
F) 

Reliez, en justifiant, chaque équation à chaque courbe.

Correction détaillée

Exercice 11.1.25

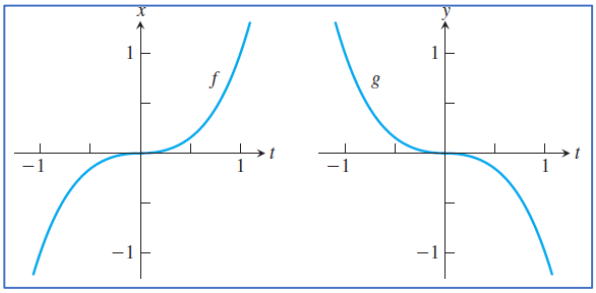
Utilisez les graphes de $x = f(t)$ et $y = f(t)$ pour tracer la courbe paramétrique correspondante dans le plan xy.



Correction détaillée

Exercice 11.1.26

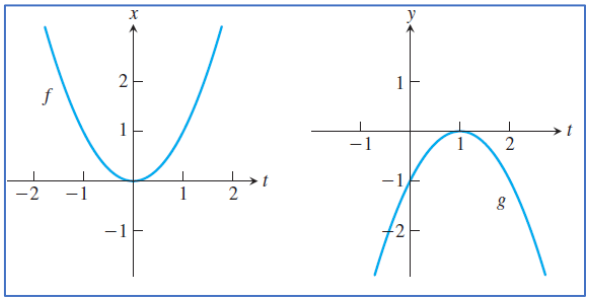
Utilisez les graphes de $x = f(t)$ et $y = f(t)$ pour tracer la courbe paramétrique correspondante dans le plan xy.



Correction détaillée

Exercice 11.1.27

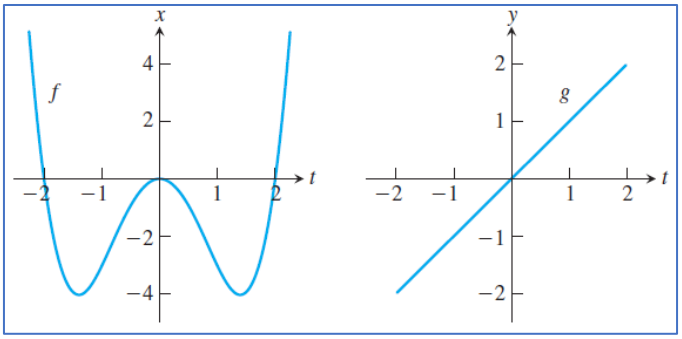
Utilisez les graphes de $x = f(t)$ et $y = f(t)$ pour tracer la courbe paramétrique correspondante dans le plan xy.



Correction détaillée

Exercice 11.1.28

Utilisez les graphes de $x = f(t)$ et $y = f(t)$ pour tracer la courbe paramétrique correspondante dans le plan xy.



Correction détaillée

Exercice 11.1.29

Déterminer des équations paramétriques ainsi qu'un intervalle du paramètre décrivant le mouvement d'une particule qui part du point $(a, 0)$ et parcourt le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

a. Une fois dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire).
b. Une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens antihoraire).
c. Deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
d. Deux fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
(Il existe de nombreuses façons de répondre à ces questions. Votre réponse ne sera pas unique !)

Correction détaillée

Exercice 11.1.30

Déterminer des équations paramétriques ainsi qu'un intervalle du paramètre décrivant le mouvement d'une particule qui part du point $(a, 0)$ et parcourt l'ellipse d'équation :

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1$$

a. Une fois dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire).
b. Une fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens antihoraire).
c. Deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
d. Deux fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
(Il existe de nombreuses façons de répondre à ces questions. Votre réponse ne sera pas unique !)

Correction détaillée

Exercice 11.1.31

Déterminer une représentation paramétrique du segment de droite dont les extrémités sont les points :
$(-1,-3)$ et $(4,1)$

Correction détaillée

Exercice 11.1.32

Déterminer une représentation paramétrique du segment de droite dont les extrémités sont les points :
$(-1,3)$ et $(3,-2)$

Correction détaillée

Exercice 11.1.33

Déterminer une représentation paramétrique de la moitié inférieure de la parabole $x-1=y^2$.

Correction détaillée

Exercice 11.1.34

Déterminer une représentation paramétrique de la moitié gauche de la parabole $y=x^2+2x$

Correction détaillée

Exercice 11.1.35

Déterminer une représentation paramétrique du demi segment de point initial $(2,3)$ qui passe par le point $(-1,-1)$

Correction détaillée

Exercice 11.1.36

Déterminer une représentation paramétrique du demi segment de point initial $(-1,2)$ qui passe par le point $(0,0)$

Correction détaillée

Exercice 11.1.37

Correction détaillée

Exercice 11.1.38

Indices Correction détaillée

Exercice 11.1.39

Correction détaillée

Exercice 11.1.40

Correction détaillée

Exercice 11.1.41

Correction détaillée

Exercice 11.1.42

Correction détaillée

Exercice 11.1.43

Correction détaillée

Exercice 11.1.44

Correction détaillée

Exercice 11.1.45

Correction détaillée

Exercice 11.1.46

Correction détaillée

Exercice 11.1.47

Correction détaillée

Exercice 11.1.48

Correction détaillée

Exercice 11.1.49

Correction détaillée

Exercice 11.1.50

Indices Correction détaillée

Exercice 11.1.51

Correction détaillée

Exercice 11.1.52

Correction détaillée

Exercice 11.1.53

Correction détaillée

Exercice 11.1.54

Correction détaillée

CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Correction Exercice 11.1.1

$$x = 3t\,;y = 9\,t^2\,;\ -\infty < t < \infty$$

a) L'objectif est d'éliminer le paramètre t. On a $t = \frac{x}{3} \Rightarrow y = 9\left(\frac{x}{3}\right)^2 = x^2$

L'équation recherchée est donc : $\boldsymbol{y = x^2}$ qui est une parabole.

Elle est orientée vers le haut, de sommet à l'origine $(0,0)$.

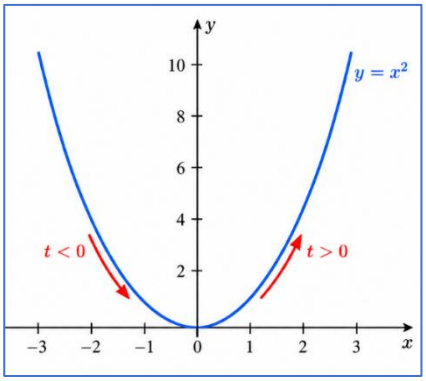
La particule parcourt donc toute la parabole $y = x^2$ pour tous les x réels.

b) Si $t < 0$, $x = 3t < 0$ et $y^2 > 0$.

À $t = 0$, $(x, y) = (0,0)$

Si $t > 0$, $x = 3t > 0$ et $y^2 > 0$

Donc, la particule descend de la branche gauche et remonte le long de la branche droite.



Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.2

$$x = -\sqrt{t}\,;\ y = t\,;\ t \geq 0$$

a) $y = t \Rightarrow x = -\sqrt{y} \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow y = x^2$

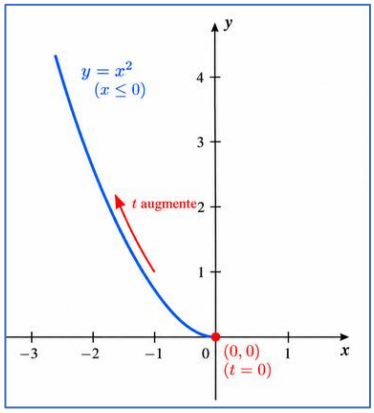
L'équation recherchée est donc : $\boldsymbol{y = x^2}$ qui est une parabole.

Elle est orientée vers le haut, de sommet à l'origine $(0,0)$.

La particule ne parcourt QUE la branche gauche puisque $t \geq 0$ et donc $x = -\sqrt{t}$ est forcément ≤ 0.

b) À $t = 0$, $(x, y) = (0,0)$

Si t augmente, $x = -\sqrt{t}$ devient de plus en plus négatif. La particule part donc de $(0,0)$ et remonte vers le haut de la branche gauche.



Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.3

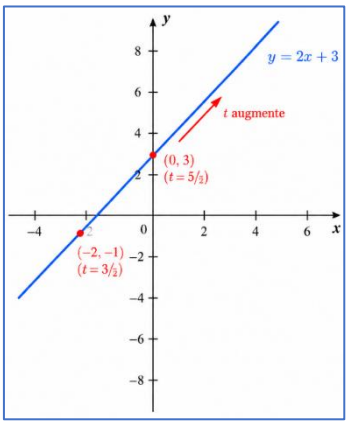
$$x = 2t - 5\,;\, y = 4t - 7\,;\, -\infty < t < \infty$$

a) $x = 2t - 5 \Rightarrow t = \frac{x+5}{2} \Rightarrow y = 4\left(\frac{x+5}{2}\right) - 7 = 2x + 10 - 7 = 2x + 3$

L'équation recherchée est donc : $\boldsymbol{y = 2x + 3}$ qui est une droite

Comme t varie de $-\infty$ à $+\infty$, x et y prennent toutes les valeurs réelles et la particule parcourt toute la droite.

b) Lorsque t augmente, x augmente et y augmente aussi. La particule « monte » donc le long de la droite.



Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.4

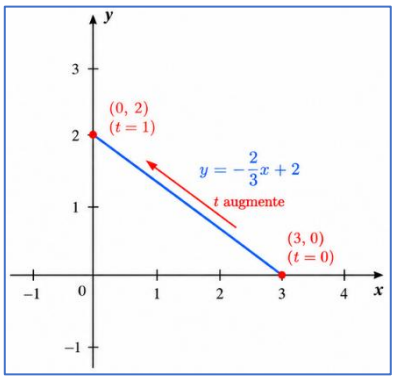
$$x = 3 - 3t\,;\, y = 2t\,;\, \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} \leq \mathbf{1}$$

a) $y = 2t \Rightarrow t = \frac{y}{2} \Rightarrow x = 3 - 3\left(\frac{y}{2}\right) = 3 - \frac{3}{2}y \Rightarrow 2(x - 3) = -3y \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + 2}$

L'équation recherchée est donc : $\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + 2}$ qui est une droite

Comme t varie de 0 à 1, alors $x \in [0,3]$ et $y \in [0,2]$

b) Lorsque t augmente, x diminue et y augmente. La particule « monte » donc le long de la droite, de la droite vers la gauche.



Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.5

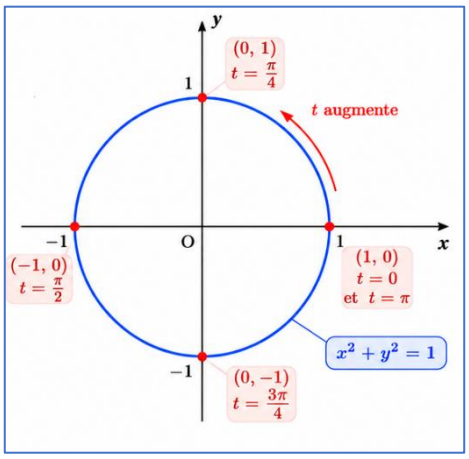
$$x = \cos 2t \ ; y = \sin 2t \ \ ; \ 0 \leq \ t \leq \pi$$

a) On voit que $x^2 = \cos^2 2t$ et $y^2 = \sin^2 2t$, donc, $x^2 + y^2 = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$

Il s'agit donc simplement du cercle $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$, de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Comme t varie de 0 à π, alors $\varphi = 2t$ va varier de 0 à 2π.

La particule va donc parcourir le cercle entier, en effectuant un tour complet.



b) Lorsque t augmente, $\varphi = 2t$, donc le point $(\cos\varphi, sin\varphi)$ tourne dans le **sens trigonométrique, càd, anti-horloger**.

Quelques points 'remarquables' de passage sont :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
(x,y)	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(1,0)$

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.6

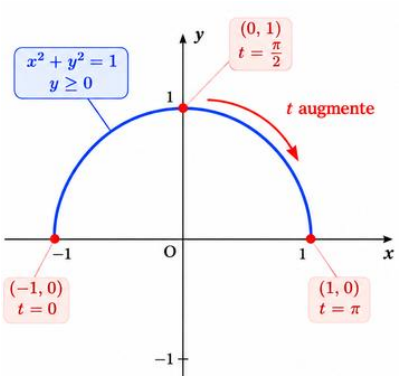
$$x = \cos(\pi - t) \ ; y = \sin(\pi - t) \ ; \ 0 \leq \ t \leq \pi$$

Or, $\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$

a) Donc $\boldsymbol{x = -\cos t}$ **et** $\boldsymbol{y = \sin t}$ et $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ MAIS $0 \leq \ t \leq \pi$

Il s'agit d'un cercle du cercle $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$, de centre $(0,0)$ et de rayon 1, mais uniquement considéré sur la moitié supérieure vu que $\boldsymbol{y = \sin t}$ **est toujours** $\boldsymbol{\geq 0}$ pour $0 \leq \ t \leq \pi$

Plus précisément, $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ mais vu que $y \geq 0, (voir(a))$ il 'reste' $\boldsymbol{y=\sqrt{1-x^2}}$ qui est l'équation recherchée.



b) Posons $\varphi=\pi-t$, alors lorsque $t=0$, $\varphi=\pi$ et lorsque t augmente jusque π, φ évolue vers 0. Donc, la particule se meut dans le sens horloger, soit dans le sens anti-trigonométrique.

Quelques points 'remarquables' de passage sont :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
(x,y)	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.7

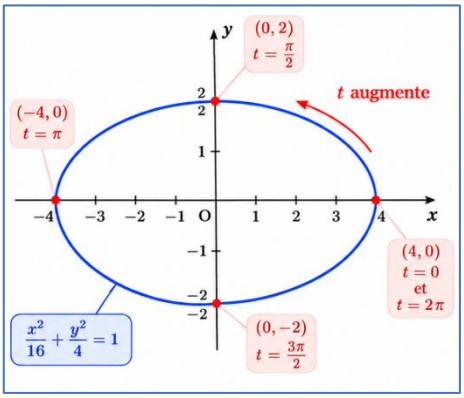
$$x=4\cos t \ ; y=2\sin t \ \ ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

a) $x=4\cos t \Leftrightarrow \cos t=\frac{x}{4}$ et $y=2\sin t \Leftrightarrow \sin t=\frac{y}{2}$ et comme $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, on a :

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

qui est l'équation d'une ellipse de centre $(0,0)$, de demi-grand axe $a=4$ (axe x) et de demi-petit axe (axe y) $b=2$.

t variant de 0 à 2π, la particule parcourt l'ellipse entière (1 tour au total).



b) Lorsque $t=0$, $(x,y)=(4,0)$. Le point de départ est donc l'extrémité droite de l'ellipse.
Lorsque t augmente, $\cos t$ diminue (et donc x) tandis que $\sin t$ augmente (et donc y).
La particule parcourt donc l'ellipse dans le sens anti-horloger (càd trigonométrique).

Quelques points 'remarquables' de passage sont :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
(x,y)	$(4,0)$	$(0,2)$	$(-4,0)$	$(0,-2)$	$(4,0)$

Retour énoncé

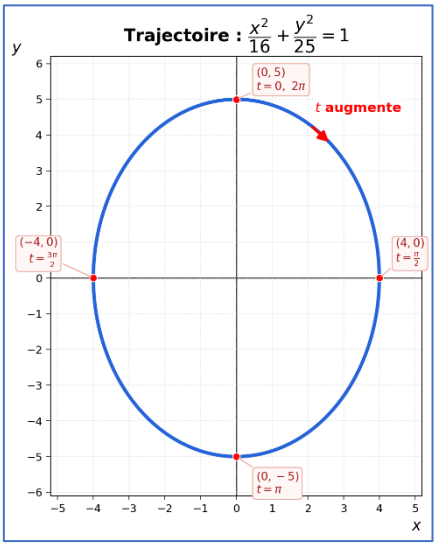
Correction Exercice 11.1.8

$$x = 4\sin t \ ; y = 5\cos\ t \ \ ; \ 0 \leq \ t \leq 2\pi$$

a) $x = 4\sin t \Leftrightarrow \sin t = \frac{x}{4}$ et $y = 5\cos\ t \ \Leftrightarrow \cos t = \frac{y}{5}$ et comme $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on a :

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse de centre $(0,0)$, de demi axe $a = 4$ (axe x) et de demi axe $b = 5$ (axe y).



t variant de 0 à 2π, la particule parcourt l'ellipse entière (1 tour au total).

b) Lorsque $t = 0$, $(x, y) = (0,5)$. Le point de départ est donc l'extrémité supérieure de l'ellipse.
Lorsque t augmente, $\sin t$ augmente (et donc x) tandis que $\cos t$ diminue (et donc y).
La particule parcourt donc l'ellipse dans le sens horloger (càd anti-trigonométrique).

Quelques points 'remarquables' de passage sont :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
(x, y)	$(0,5)$	$(4,0)$	$(0,-5)$	$(-4,0)$	$(0,5)$

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.9

$$x = \sin t \ ; y = \ \cos\ 2t \ \ ; -\frac{\pi}{2} \leq \ t \leq \frac{\pi}{2}$$

a) Le '$\cos 2t$' suggère d'utiliser l'identité trigonométrique $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ de sorte que :

$$y = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2\,x^2$$

$\boldsymbol{y = 1 - 2x^2}$ est donc l'équation recherchée.

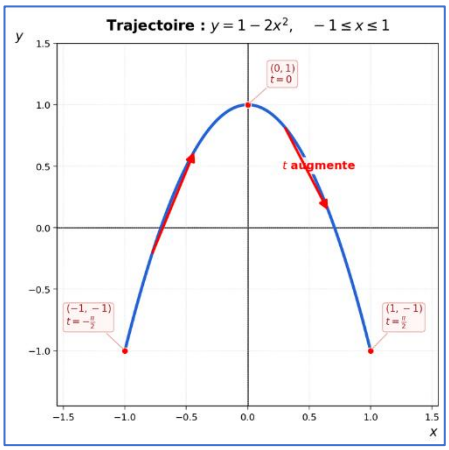
Il s'agit d'une parabole orientée vers le bas (car '$-2\,x^2$').

Une simple étude élémentaire du trinôme du second degré montre que les 2 racines sont :

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vu que $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, x va de $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ à $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, càd de -1 à 1

Donc la particule parcourt la **parabole $y = 1 - 2x^2$ sur la portion $x \in [-1, 1]$**



b) Lorsque $t = -\frac{\pi}{2}, (x, y) = (-1, -1)$. Puis, lorsque t augmente, x progresse vers 0, puis 1. Alors que $y = \cos 2t$ progresse d'abord de -1 à +1, puis redescend à -1.
La particule va donc de gauche à droite.

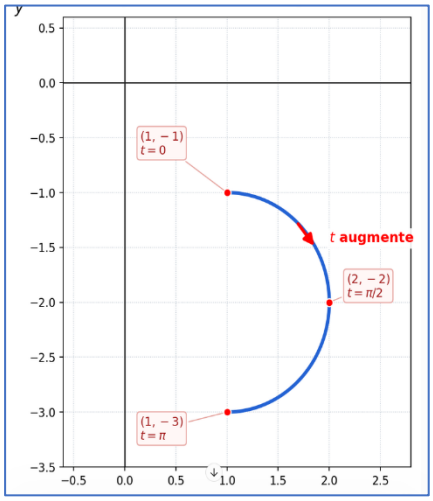
Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.10

$$x = 1 + \sin t \; ; y = \cos t - 2 \; ; \; 0 \leq t \leq \pi$$

a) $x = 1 + \sin t \Rightarrow \sin t = x - 1 \quad ; \quad y = \cos t - 2 \Rightarrow \cos t = y + 2$

Etant donne que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on a $\boldsymbol{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1}$
Il ne faut surtout pas développer et se rendre compte à ce stade qu'il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon 1 et de centre $(1, -2)$
On donne : $0 \leq t \leq \pi$, donc, $\sin t$ va de 0 à … 0 en passant par un maximum de 1 et $x = 1 + \sin t$ va alors de 1 à 1 en passant par un maximum de 2.
Finalement, $x \in [1,2]$
La particule parcourt donc la partie droite d'un demi-cercle centré sur (1,-2) et de rayon 1.



b) Initialement, $t = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, -1)$. Lorsque $t = \frac{\pi}{2}$, $(x, y) = (2, -2)$ et lorsque $t = \pi$, $(x, y) = (1, -3)$. La particule descend donc le demi-cercle (du haut vers le bas).

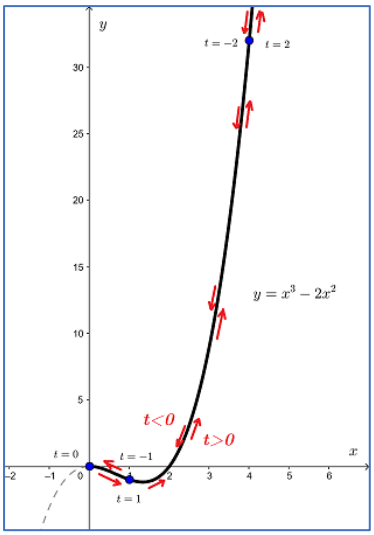
Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.11

$$x = t^2 \; ; y = t^6 - 2t^4 \; ; \; -\infty < t < \infty$$

a) On a immédiatement : $t^6 = x^3$ et $t^4 = x^2$ donc, $\boldsymbol{y = x^3 - 2x^2}$ ou encore $\boldsymbol{y = x^2(x-2)}$.

Et puisque $x = t^2$, on a forcément $\boldsymbol{x \geq 0}$.
Les racines de $y = x^2(x-2)$ sont immédiates : 0 et 2. Donc, la fonction passe par les points $(0,0)$ et $(2,0)$.
Vu que $y'(x) = 3x^2 - 4x$ et donc que $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \frac{4}{3}$,
et que de plus $y''(x) = 6x - 4 \Rightarrow y''\left(\frac{4}{3}\right) = 4$ donc, la fonction est convexe en $x = \frac{4}{3}$ qui est donc un minimum, on peut tracer l'allure de la courbe parcourue par la particule.



b) Pour t venant de $-\infty$, x vient de $+\infty$ et y diminue. La particule vient donc de la droite de la courbe et la descend.
En $t = 0$, $(x, y) = (0,0)$
Puis lorsque $t \to +\infty$, x repart vers $+\infty$ et y aussi.
Au final, la particule vient donc de la droite, « bute » en $(0,0)$ et repart vers la droite !

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.12

$$x = \frac{t}{t-1} \; ; y = \frac{t-2}{t+1} \; ; -1 < t < 1$$

Il n'y a pas d'astuce facile immédiate, on isole alors t dans $x = \frac{t}{t-1}$.

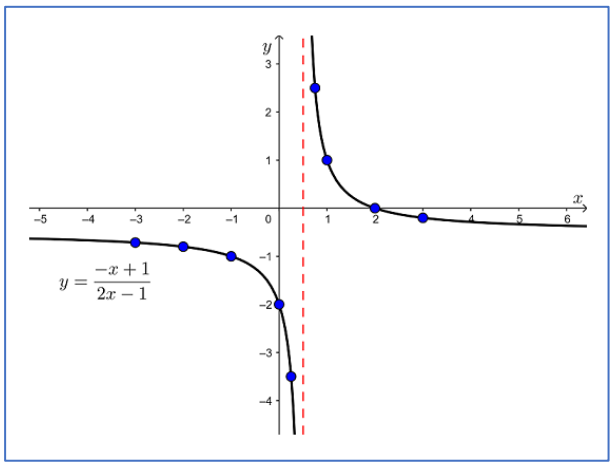
$$x = \frac{t}{t-1} \Rightarrow x(t-1) = t \Rightarrow xt - x = t \Rightarrow xt - t = x \Leftrightarrow t = \frac{x}{x-1}$$

Qu'on injecte dans $y = \frac{t-2}{t+1}$.

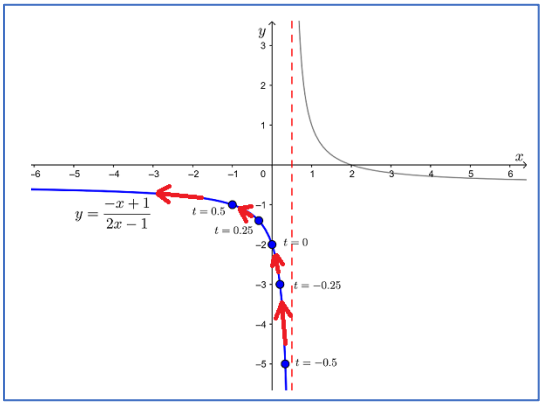
$$\boldsymbol{y = \frac{t-2}{t+1} = \frac{\frac{x}{x-1} - 2}{\frac{x}{x-1} + 1} = \frac{x - 2x + 2}{x + x - 1} = \frac{-x+2}{2x-1}}$$

a) $\boldsymbol{y = \frac{-x+2}{2x-1}}$ est donc l'équation recherchée.
On voit déjà immédiatement que $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale car racine du dénominateur. De même, on note que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-x+2}{2x-1} = -\frac{1}{2}$ qui constitue donc une asymptote horizontale.
À ce stade, on fait soit une étude de fonction élémentaire ou on choisit quelques points 'faciles' pour tracer la fonction (comme $(0,-2)$ entre autres), ce que je ne fais pas ici car ce genre d'études de fonctions n'est pas l'objet de cet exercice et cela est fait par ailleurs.

On obtient :



b) On donne $-1 < t < 1$. Or $x = \frac{t}{t-1}$.
Lorsque $t \to -1^+$ ($càd\ tend\ vers -1\ par\ la\ droite, ex -0{,}999\cdots$), $x \to \frac{1}{2}$
Lorsque $t \to 1^-$ ($càd\ tend\ vers\ 1\ par\ la\ gauche, ex\ 0{,}999\cdots$), $x \to -\infty$
On conclut d'une part que la particule ne circule que sur la portion gauche de la fonction, où $x \in]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et de plus, qu'elle circule dans le sens de la droite vers la gauche, càd de $x \mapsto \frac{1}{2}$ ($lorsque -1 < t$) vers $x \mapsto -\infty$ ($lorsque\ t < 1$)

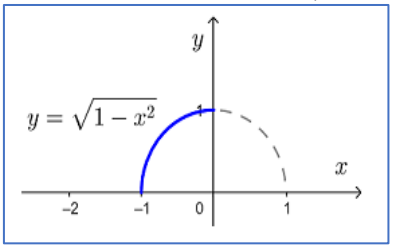


Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.13

$$x = t\ ; y = \sqrt{1-t^2}\ ;\ -1 \leq t \leq 0$$

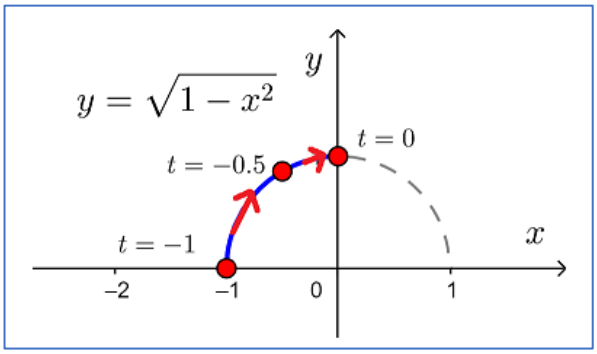
a) Il est évident ici, qu'on injecte $t = x$ dans $y = \sqrt{1-t^2}$ ce qui donne : $\boldsymbol{y = \sqrt{1-x^2}}$ qui est l'équation recherchée. Élevons un instant au carré pour mieux réaliser de quelle fonction il s'agit : $y^2 = 1 - x^2$ ou encore $x^2 + y^2 = 1$. Ce qui est un cercle centré en $(0,0)$ et de rayon 1. Mais ici, vu que $y = \sqrt{1-t^2}$ est toujours positif, on ne considère donc QUE la moitié supérieure du cercle, càd celle où $y \geq 0$. Et comme de plus $x = t$, $-1 \leq t \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$, il ne reste plus que le quart supérieur gauche du cercle, càd la partie pour laquelle $-1 \leq x \leq 0$ et $y \geq 0$



b) $-1 \leq t \leq 0$

Donc, lorsque $t = -1, (x, y) = (-1,0)$ et lorsque $t = 0, (x, y) = (0,1)$.

La particule remonte donc le quart de cercle de gauche $(x = -1)$ vers la droite $(x = 0)$.



Retour énoncé

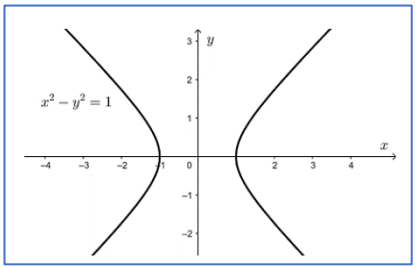
Correction Exercice 11.1.14

$$x = \sqrt{t+1}\ ; y = \sqrt{t}\ ;\ t \geq 0$$

a) Comme d'habitude, pour ce genre d'équation, on élève au carré afin de « visualiser « la totalité de la fonction, et on restreint les domaines ensuite. Ici :

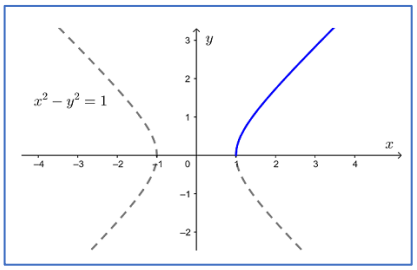
$x^2 = t + 1$ et $y^2 = t$. Injectons $t = y^2$ dans x^2. Cela donne : $x^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - y^2 = 1}$.

Il s'agit de l'équation d'une hyperbole dont les sommets sont situés en $(-1,0)$ et $(1,0)$. On le voit immédiatement en remplaçant $y = 0$ dans l'équation $x^2 - y^2 = 1$.

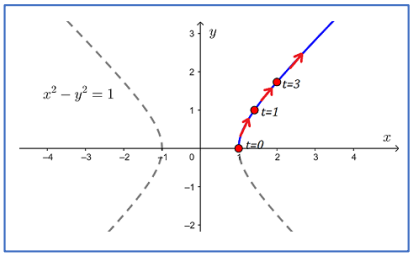


On part donc de la figure ci-contre :

Ensuite, l'énoncé indique $y = \sqrt{t}$, donc y est forcément positif. Cela nous restreint aux parties supérieures des 2 branches de l'hyperbole. Ensuite, l'énoncé précise aussi $x = \sqrt{t+1}$ donc x est aussi forcément positif, ce qui finalement nous retreint à la partie supérieure droite de l'hyperbole ! Et donc à la figure ci-contre :



b) Il est clair, vu que $x = \sqrt{t+1}\ ; y = \sqrt{t}$, en $t = 0$, on a $(x, y) = (1,0)$. Et ensuite lorsque t augmente, x et y augmente. Donc la particule part de $(1,0)$ et monte le long de la branche supérieure droite de l'hyperbole (voir graphe ci-contre).



Retour énoncé

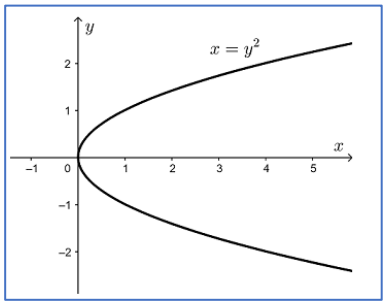
Correction Exercice 11.1.15

$$x = sec^2 t - 1 \; ; y = \tan t \; ; -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

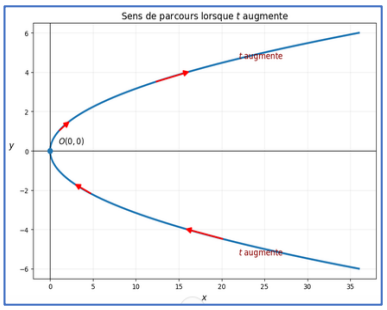
On rappelle que $\sec t = \frac{1}{\cos t}$, donc $sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow x = sec^2 t - 1 = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \tan^2 t$. Il nous reste donc ;

$$x = tan^2 t \; ; y = \tan t \; ; -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

a) On obtient trivialement $\boldsymbol{x = y^2} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$ qui est une parabole.
Vu que $x = \tan^2 t$, x est forcément positif, ce qui n'apporte pas d'information puisque $\sqrt{x}$ l'impliquait déjà... et comme $y = \tan t \; ; -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, y va de $-\infty$ à $+\infty$.
La particule parcourt donc toute la parabole.



b) Lorsque t vient de $-\frac{\pi}{2}$, on part de y venant de $-\infty$ et x venant de $+\infty$. Pour $t = 0$, on passe par $(x, y) = (0,0)$. Et lorsque t continue vers $+\frac{\pi}{2}$, x et y partent vers $+\infty$.
La particule vient donc du bas de la parabole pour remonter vers le haut (figure ci-contre).



Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.16

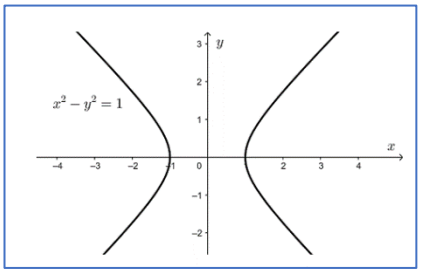
$$x = -sec\, t \; ; y = \tan t \; ; -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Rappelons que $\sec t = \frac{1}{\cos(t)}$ et que $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

a) On remarque que : $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \Rightarrow \tan^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1 = sec^2 t - 1$

Et donc :

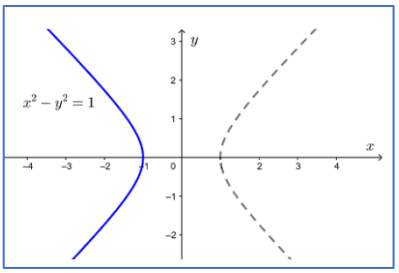
$y^2 = \tan^2 t = sec^2 t - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow \boldsymbol{x^2 - y^2 = 1}$ est l'équation recherchée, laquelle est une hyperbole de sommets $(x, y) = (\pm 1, 0)$ (voir figure ci-contre)



Ensuite, on doit tenir compte de

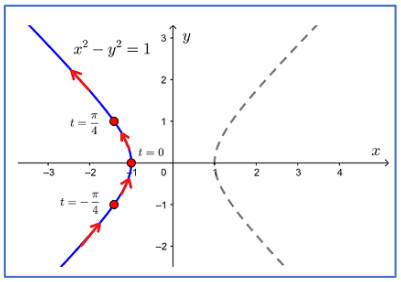
$$x = -\sec t = -\frac{1}{\cos t} \quad avec \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Or, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\cos t} < \infty \Rightarrow -\infty < -\frac{1}{\cos t} \leq -1 \Rightarrow -\infty < \boldsymbol{x \leq -1}$



On ne doit donc considérer que la branche gauche de l'hyperbole (figure ci-contre)

b) Lorsque t vient de $-\frac{\pi^+}{2}$ (càd $-\frac{\pi}{2}$ vers la droite) , (x, y) viennent tous deux de $-\infty$. Lorsque $t = 0$, la particule passe par $(0,0)$ et lorsque t va vers $\frac{\pi^-}{2}$ (càd $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche) , x part vers $-\infty$ tandis que y part vers $+\infty$.
La particule vient donc du bas, passe par $(0,0)$ et remonte la branche gauche de l'hyperbole.



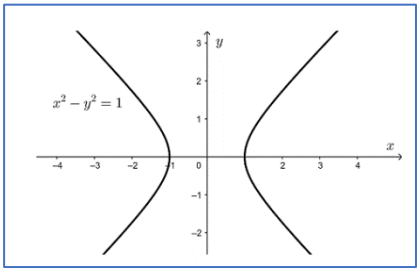
Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.17

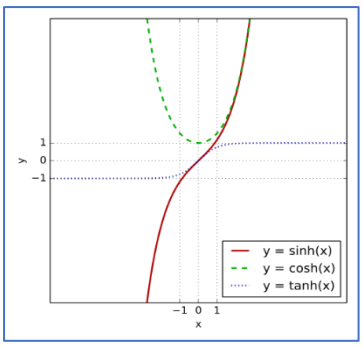
$$x = -\cosh t \; ; y = \sinh t \; ; \; -\infty < t < \infty$$

On exploite la relation (à connaître par cœur !) : $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

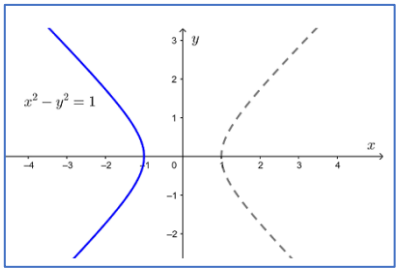
a) Utilisant $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ et ayant $x = -\cosh t \Rightarrow x^2 = \cosh^2 t$ et $y^2 = \sinh^2 t$, on a $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1}$ qui est l'équation recherchée et qui correspond à l'équation d'une hyperbole, la même que l'exercice 11.1.16.



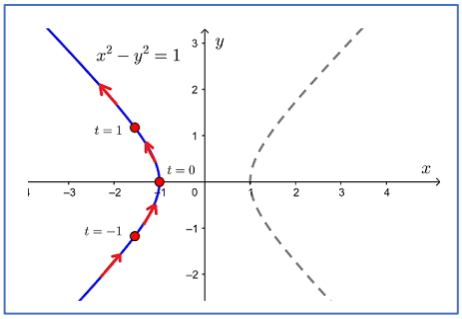
Profitons de l'occasion pour rappeler que :
$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ (voir les graphe ci-contre).



On voit sur le graphe de $\cosh(t)$ que $\forall t, \cosh(t) \in [1, +\infty[$ et donc, $x = -\cosh(t) \in]-\infty, -1]$
On est donc sur la branche gauche de l'hyperbole.



b) Vu que $-\infty < t < \infty$, $-\cosh(t)$ vient de $-\infty$ et repart vers $-\infty$.
$y = \sinh(t)$ quant à lui, vient de $-\infty$ vers $+\infty$.
La particule vient donc du bas de la branche gauche de l'hyperbole, et remonte le long de cette branche, en passant par $(-1,0)$



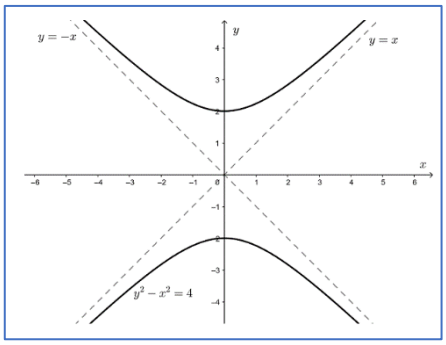
Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.18

$$x = 2\sinh t \ ; y = 2\cosh t \ ; \ -\infty < t < \infty$$

a) On utilise encore (voir exercice 11.1.17) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. En effet, ici :

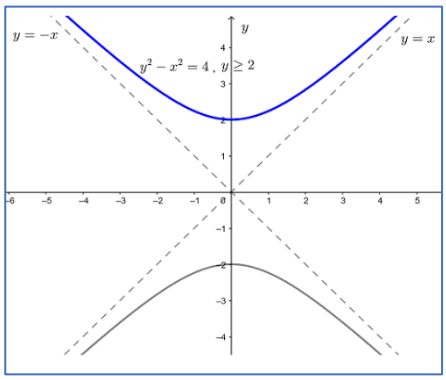
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Leftrightarrow 4(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = 4$$
$$\Leftrightarrow (2\cosh t)^2 - (2\sinh t)^2 = 2^2$$
$$\Leftrightarrow y^2 - x^2 = 4$$



On voit directement que lorsque $x = 0$, $y = \pm 2$. Les 2 branches ont donc comme sommets $(0,-2)$ et $(0,2)$. Elles sont donc symétriques par rapport à l'axe des X.

Comme $y = 2\cosh t$ et qu'on sait (voir exercice 11.1.17)

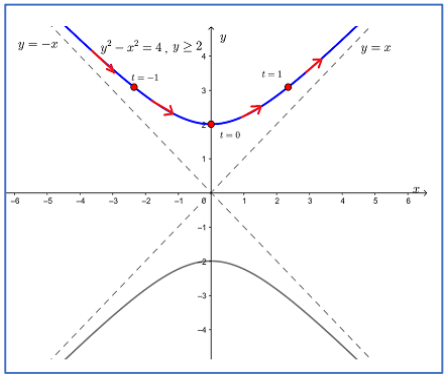
que $\forall t, \cosh(t) \in [1, +\infty[$, on a $2\ \cosh(t) \in [2, +\infty[$.



La particule ne se déplace donc que sur la branche supérieure de l'hyperbole.

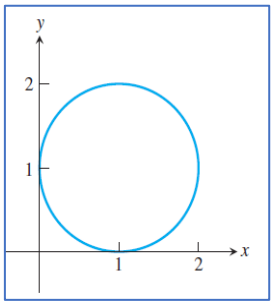
b) Comme $-\infty < t < \infty$, $x = 2\sinh t$ va de $-\infty$ à $+\infty$ et $y = 2\cosh t$ va de $+\infty$ à $+\infty$ en passant par $(0,2)$ (voir les courbes des fonctions hyperboliques sur exercice 11.1.17)

Cela signifie que la particule vient de la gauche $(x < 0)$ sur la branche supérieure de l'hyperbole, descend vers $(0,2)$, et remonte vers la droite $(x > 0)$le long de la branche.

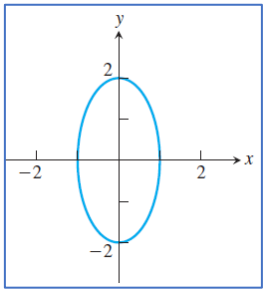


Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.19 11.1.20 11.1.21 11.1.22 11.1.23 11.1.24



a) $x = 1 - \sin t \ ; \ y = 1 + \cos t$
On a : $\sin t = 1 - x$ et $\cos t = y - 1$
et comme $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$, on a $(1-x)^2 + (y-1)^2 = 1$, il s'agit alors d'un cercle centré en $(1,1)$ et de rayon 1. Soit la **figure D**.



b) $x = \cos t \ ; \ y = 2\sin t$

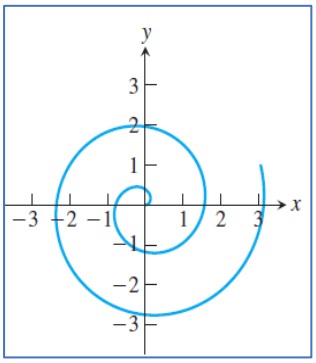
On a : $\cos t = x$ et $\sin t = \frac{y}{2}$

et comme $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$, on a $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{1}\right)^2 = 1$, il s'agit alors d'une ellipse centrée en $(0,0)$, de demi axe 1 selon X et de demi-axe 2 selon Y. Soit la **figure B**.

c) $x = \frac{1}{4}\, t\cos t \ ; y = \frac{1}{4} t\, sint$

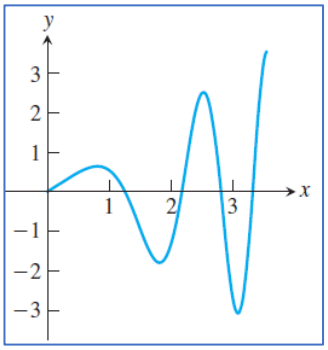
S'il n'y avait pas de facteur t multiplicatif, cela serait clairement un cercle centré en $(0,0)$ de rayon ¼ . Ici, le facteur t multiplicatif indique qu'au fur et à mesure que t augmente, le « cercle » s'agrandit continument ! En $t = 0$, $(x, y) = 0$. Il s'agit donc d'une spirale. On peut finir de s'en convaincre en choisissant quelques points particuliers et faciles à calculer.

$t = 0$	$x = 0$	$y = 0$
$t = \frac{\pi}{2}$	$x = 0$	$y = \frac{\pi}{8}$
$t = \pi$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$y = 0$
$t = \frac{3\pi}{2}$	$x = 0$	$-\frac{3\pi}{8}$



Il s'agit donc de la **figure *E***.

d) $x = \sqrt{t} \ ; \ y = \sqrt{t}\cos(t)$

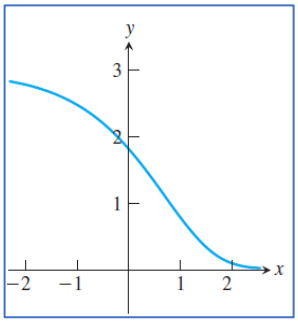


Première chose à remarquer, x est forcément positif vu que $\sqrt{t}$ est positif. Le graphe se situe donc uniquement sur la partie positive de l'axe des X. Ensuite, lorsque $t = 0, (x, y) = 0$.

Finalement, $y = \sqrt{t}\cos(t)$ indique que lorsque t augmente, y augmente en amplitude, mais oscille (à cause de $\cos(t)$).

Il s'agit donc forcément du **graphe B**.

e) $x = \ln t \quad ; \quad y = 3\,e^{-\frac{t}{2}}$



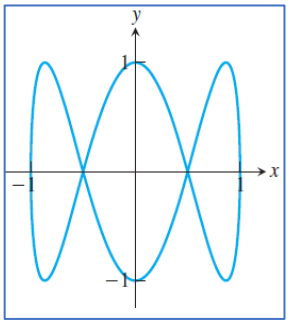
Lorsque $t = 0$, $(x, y) = (-\infty, 3)$. Cela signifie qu'il y a une asymptote horizontale en $y = 3$.

Lorsque $t = 1$, $(x, y) = (0, 3e^{-\frac{1}{2}})$

Lorsque $t \mapsto \infty$, $x \mapsto \infty$ et $y \mapsto 0$

Il s'agit donc du **graphe C**.

f) $x = \cos t \quad ; \quad y = \sin 3t$



La première chose la plus importante à remarquer est que, quel que soit t, $\boldsymbol{x}$ **et** $\boldsymbol{y}$ sont toujours dans l'intervalle $[-1,1]$, ce qui veut dire que la figure est confinée dans un carré centré en 0, et allant de -1 à 1, tant pour x que pour y.

Ensuite on peut prendre quelques points particuliers :

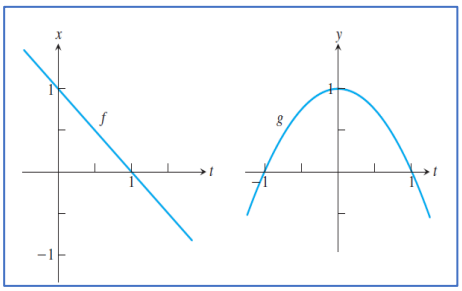
Lorsque $t = 0$, $(x, y) = (1,0)$.

Lorsque $t = \pi$, $(x, y) = (-1,0)$

Il s'agit de la **figure F**.

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.25



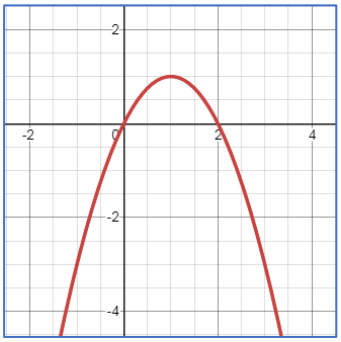
1. On commence par chercher les équations des 2 fonctions :
   a) La première est clairement $x + t = 1 \Leftrightarrow t = 1 - x$
   b) La deuxième est une parabole, symétrique en $t = 0$, concave et de racines -1 et $+1$ et telle que $y(t = 0) = 1$
   Elle est donc du **type** $y = (t - 1)(t + 1)$

   De plus, elle est concave, le coefficient en t doit donc être négatif.

   On arrive à $y = -(t - 1)(t + 1) \Leftrightarrow y = -t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 = 1 - y$

2. On injecte $t = 1 - x$ dans $t^2 = 1 - y \Rightarrow (1 - x)^2 = 1 - y \Leftrightarrow y = 1 - (1 - x)^2$
   $\Leftrightarrow y = 1 - (1 - 2x + x^2) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -x^2 + 2x}$ qui est l'équation recherchée !

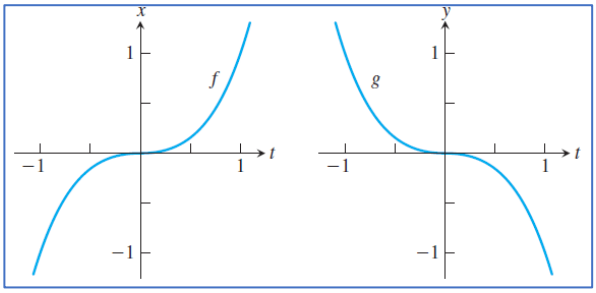
3. Le graphe de $y = -x^2 + 2x$ est :



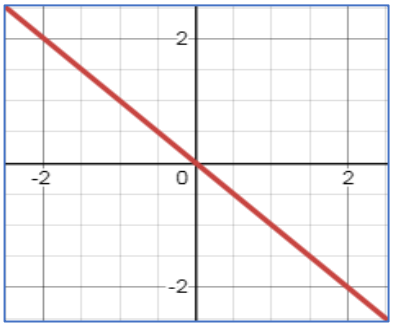
Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.26

1. On commence par chercher les équations des 2 fonctions :
   a) La première est clairement $x = t^3$
   b) La deuxième est la symétrie miroir de la première. Il s'agit de $y = -t^3$



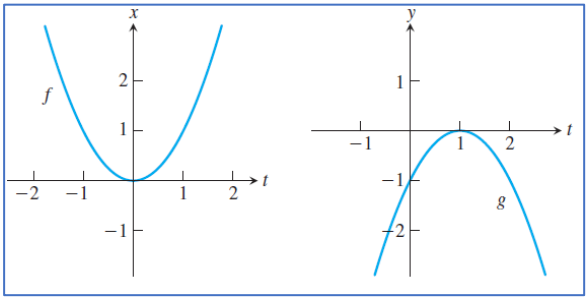
2. On obtient immédiatement $y = -x$ qui est l'équation recherchée !



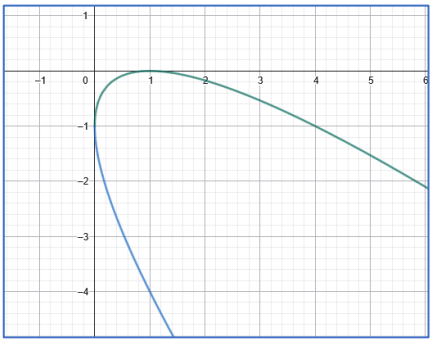
Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.27

1. On commence par chercher les équations des 2 fonctions :
   a) La première est clairement $x = t^2$
   b) La deuxième est une parabole concave de double racine 1. Il ne peut s'agir que de $y = -(t-1)^2 = -t^2 + 2t - 1$



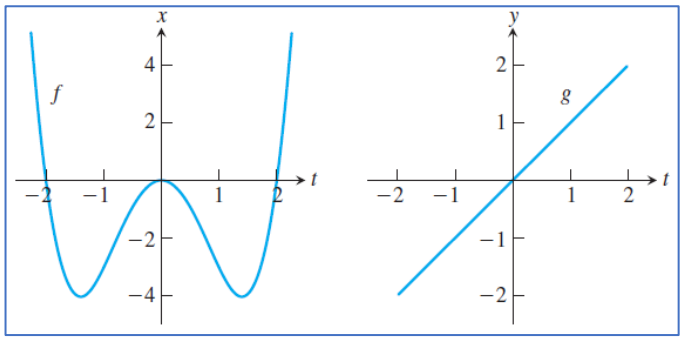
2. De (a), on tire aussi que $t = \pm\sqrt{x}$, on voit donc que $y = -x + 2\sqrt{x} - 1$ est une partie de l'équation et que l'autre partie est : $y = -x - 2\sqrt{x} - 1$
   On peut tracer ces 2 équations avec un logiciel tel que Geogebra qui montre bien les 2 courbes qui se rejoignent pour n'en former qu'une seule (regardez les couleurs !).



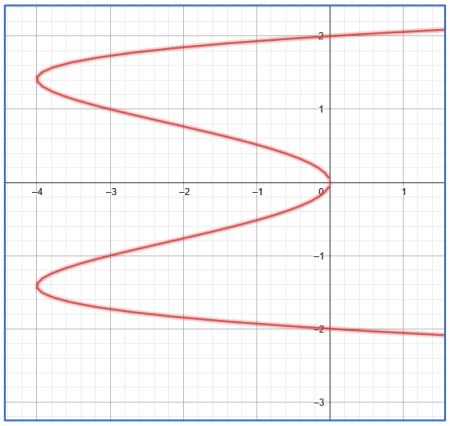
Une autre manière de tracer la courbe dans le plan XY consiste aussi simplement à la laisser sous la forme $(x, y) = (t^2, -(t-1)^2)$ et de choisir quelques points t particuliers (ex : $t = -3; t = -2\,; t = -1\,; t = 0\,; t = 1\,; t = 2\,; t = 3$) pour se faire une idée rapide de l'allure de la courbe dans le plan XY.

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.28



1. On commence par chercher les équations des 2 fonctions :
   a) La première fonction est paire (symétrique par rapport à l'axe X). On observe 3 racines : -2, 0 et 2.
   Comme la fonction est paire ($f(t) = f(-t)$), cela implique qu'elle comporte des puissances en t^2 et/ou t^4, t^6 etc.
   Il ne peut pas s'agir d'un polynôme d'ordre 2 vu qu'il y a 3 racines (un polynôme d'ordre 2 n'en admettrait que 2 au plus). Au vu des 3 racines, on suppose que l'une d'elle est double, supposons logiquement, vu le graphe qu'il s'agisse de 0 (en réalité, on peut même le démontrer formellement dès lors qu'on voit que $x'(t = 0) = 0$, mais je ne le fais pas ici).
   On part donc sur un polynôme qui serait d'ordre 4 et de type $\boldsymbol{x(t) = t^2(t-2)(t+2) = t^4 - 4t^2}$
   On peut tracer cette fonction sur Geogebra, ce qui confirmera qu'il s'agit bien de la fonction recherchée.
   b) La deuxième est trivialement $y(t) = t$
2. De (b), on voit donc que $t = y$, et que $x(t) = t^4 - 4t^2$ devient donc $x(t) = y^4 - 4y^2$
   On peut tracer cette équation avec un logiciel tel que Geogebra pour obtenir la figure ci-contre.
   Une autre manière de tracer la courbe dans le plan XY consiste aussi simplement à la laisser sous la forme $(x, y) = (t^4 - 4t^2, t)$ et de choisir quelques points t particuliers (ex : $t = -2; t = -1\,; t = 0\,; t = 1\,; t = 2\,$) pour se faire une idée rapide de l'allure de la courbe dans le plan XY.



Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.29

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.30

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.31

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.32

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.33

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.34

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.35

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.32

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.33

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.34

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.35

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.36

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.37

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.38

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.39

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.40

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.41

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.42

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.43

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.44

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.45

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.46

Correction Exercice 11.1.47

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.48

Retour énoncé

Correction Exercice 11.1.49

Retour énoncé

Correction Exercice