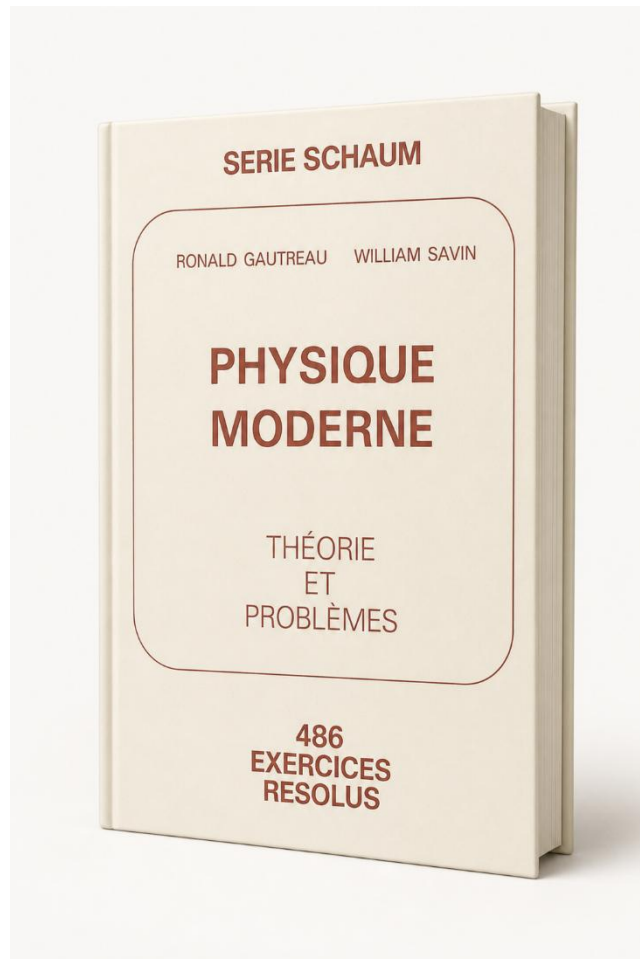


ÉNONCÉS D'EXERCICES ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS



PHYSIQUE MODERNE Gautreau / Savin – Collection Schaum

Chapitre 1 : Les transformations galiléennes

Corrigé par L. Hardy

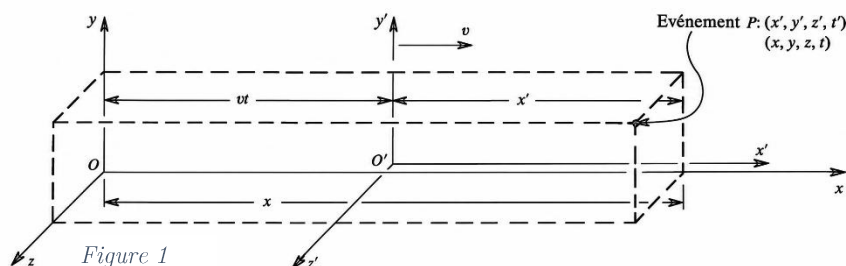
Autorisation de partager gratuitement mais interdiction formelle d'en faire un usage commercial

Les transformations galiléennes – Un très bref rappel théorique

Evènements et Coordonnées

Commençons par introduire le concept d'événement : un événement peut être aussi bien le choc de la foudre sur un arbre que la collision entre deux particules. Il se produit en un point de l'espace, à un instant donné dans le temps. Un observateur spécifie un événement particulier en lui affectant quatre coordonnées : trois coordonnées de position qui mesurent la distance du lieu où l'événement se produit au centre des coordonnées où se tient l'observateur, et une coordonnée de temps que l'observateur repère sur une horloge.

Considérons maintenant deux observateurs O et O' tels que O' se déplace à vitesse constante v par rapport à O , le long de l'axe des coordonnées x (cf. *Fig. 1*). Les deux observateurs sont équipés d'instruments de mesure des longueurs et d'horloges et peuvent donc mesurer les coordonnées des événements. De plus, supposons que les deux observateurs synchronisent leurs horloges de manière qu'en $x = x' = 0$, les temps $t = t' = 0$. À n'importe quel événement donné, seront associés huit nombres, les quatre coordonnées affectées par O , soient x, y, z, t et les quatre coordonnées affectées par O' : x', y', z' et t'



Transformation galiléenne des vitesses

Si les coordonnées d'un événement sont importantes, la connaissance de la vitesse de la particule ne manque pas d'intérêt. Les observateurs O et O' décriront la vitesse d'une particule en affectant à celle-ci trois composantes (u_x, u_y, u_z) , celles mesurées par O et (u'_x, u'_y, u'_z) , par O' . La relation entre ces deux séries est obtenue en dérivant par rapport au temps t , la relation de transformation des coordonnées. De $x' = x - vt$, nous tirons,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) \frac{dt}{dt'} = \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \cdot 1 = u_x - v$$

Et, d'une façon générale, l'expression de la transformation galiléenne des vitesses est :

$$u'_x = u_x - v \quad u'_y = u_y \quad u'_z = u_z$$

Transformations galiléennes des accélérations

L'accélération d'une particule est la dérivée par rapport au temps de sa vitesse, c'est-à-dire $a_x = \frac{du_x}{dt}$, etc.

Pour trouver l'expression de la transformation galiléenne des accélérations, nous dérivons la transformation des vitesses, en tenant compte du fait que $t = t'$ et que v est une constante, ce qui donne :

$$a'_x = a_x ; \quad a'_y = a_y ; \quad a'_z = a_z$$

Invariance d'une équation

Par ***invariance d'une équation***, nous signifions le fait que cette équation aura la même forme pour deux observateurs différents. Dans la théorie classique, on postule que les mesures d'espace et de temps sont liées par les expressions galiléennes. Il en résulte que si la forme particulière d'une équation est établie par un observateur, l'application des transformations galiléennes à cette forme permet de trouver la forme qu'elle aura pour l'autre observateur. Si les deux formes sont les mêmes, nous dirons que l'équation est **invariante par les transformations galiléennes**. Cf. problèmes 9 et 10.

Les transformations galiléennes - Exercices

Exercice 1 (réf 221)

Un passager d'un train qui se déplace à la vitesse constante de 30 m/s passe au temps $t = t' = 0$ devant un individu immobile sur un quai de gare. 20 s après le passage du train, l'observateur immobile remarque qu'un oiseau volant dans la même direction et dans le même sens que le train se trouve à 800 m de la gare. Quelles sont les coordonnées de l'oiseau dans le repère du passager ?

Solution

Exercice 2 (réf 222)

Un passager d'un train qui se déplace à la vitesse constante de 30 m/s passe au temps $t = t' = 0$ devant un individu immobile sur un quai de gare. 20 s après le passage du train, l'observateur immobile remarque qu'un oiseau volant dans la même direction et dans le même sens que le train se trouve à 800 m de la gare. 5 s après ses premières mesures, l'observateur immobile s'aperçoit que l'oiseau est à présent à 850 m de la gare. Trouver la vitesse de l'oiseau (supposée constante) pour l'observateur immobile et pour l'observateur en déplacement.

Solution

Exercice 3 (réf 223)

Un échantillon de produit radioactif, au repos dans un laboratoire, émet deux électrons dans des sens opposés. L'un des électrons possède une vitesse de $0,6 c$, l'autre de $0,7 c$, mesurées par un observateur du laboratoire. Quelle est la vitesse classique d'un des électrons par rapport à l'autre ?

Solution

Exercice 4 (réf 224)

Un train dont la vitesse est de 60 km/h passe devant une gare à $12 \text{ h } 00 ; 20 \text{ s}$ plus tard, un éclair frappe les rails à 1 km de la station, du côté où le train se déplace. Trouver les coordonnées de l'éclair dans le référentiel de la gare et dans celui du train.

Solution

Exercice 5 (réf 225)

Un chasseur au sol tire sur un daim, situé au N.O. La balle atteint le daim à $0,25 \text{ km}$ du chasseur. La vitesse de la balle est de 1800 km/h . Au moment où la balle est tirée, un avion volant vers l'Est à la vitesse de 600 km/h est juste au-dessus du chasseur. Au moment où la balle frappe le daim, quelles sont ses coordonnées dans le référentiel de l'avion ?

Solution

Exercice 6 (réf 226)

- a) Un observateur, immobile dans le référentiel de la Terre, observe la collision suivante: une masse $m_1 = 3 \text{ kg}$, se déplaçant avec une vitesse $u_1 = 4 \text{ m/s}$ le long de l'axe des x , rencontre une masse $m_2 = 1 \text{ kg}$, se déplaçant le long de l'axe des x avec une vitesse $u_2 = -3 \text{ m/s}$. Après le choc, la vitesse de m_2 est $u_2^* = 3 \text{ m/s}$. Trouver la vitesse u_1^* de m_1 après le choc.
- b) Un second observateur O' , qui se déplace le long de l'axe des x avec une vitesse de 2 m/s dans le référentiel de la Terre, observe la collision décrite en a). Quelles sont les quantités de mouvement du système avant et après collision, observées par O' ?

Solution

Exercice 7 (réf 227)

Un enfant, assis dans une voiture décapotable se déplaçant à une vitesse de 30 m/s , jette une balle dans l'air à 6 m/s .

- a) Écrire l'équation du mouvement de la balle telle qu'il est perçu par l'enfant et
- b) par un observateur situé sur le bord de la route.

Solution

Exercice 8(réf 228)

Soit une masse fixée à un ressort et se déplaçant sans frottements sur une surface horizontale. Montrer, en appliquant les transformations galiléennes, que les équations du mouvement de la masse sont les mêmes pour un observateur au repos par rapport à la surface et pour un observateur se déplaçant à vitesse constante dans la direction du ressort.

[Solution](#)

Exercice 9(réf 229)

Montrer que l'équation de propagation des ondes électromagnétiques

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

n'est pas invariante par rapport aux transformations galiléennes.

[Solution](#)

Exercice 10(réf 230)

Le passager arrière d'une automobile, longue de **6 m** et se déplaçant à une vitesse de **18 m/s**, remarque qu'un éclair électronique éclate juste devant la voiture, deux secondes après qu'il ait dépassé un homme, **O**, immobile sur le trottoir. Trouver, pour chacun des deux observateurs, **O** et **O'**, quelles sont les coordonnées de l'événement.

[Solution](#)

Exercice 11(réf 231)

Un enfant aperçoit un daim qui s'éloigne de lui en courant. La vitesse de fuite du daim est de **40 km/h**. L'enfant lui donne la chasse en courant à une vitesse de **16 km/h**. Quelle est la vitesse du daim par rapport à l'enfant ?

[Solution](#)

Exercice 12 (réf 232)

Un enfant voyageant dans un train se déplaçant à la vitesse de **160 km/h** lance une balle dans le couloir dans le sens de la marche. Sachant que la vitesse de la balle est de **40 km/h**, quelle est la vitesse de la balle pour un observateur au sol ?

[Solution](#)

Exercice 13 (réf 233)

Un passager arpente à **4 km/h**, en sens inverse de la marche, le couloir d'un train qui se déplace à **120 km/h** sur une voie rectiligne. Quelle est, pour un observateur immobile à l'extérieur du train, la vitesse du promeneur ?

[Solution](#)

Exercice 14 (réf 234)

Au temps des trains à vapeur, un chef de gare synchronise sa montre avec celle du machiniste au moment où le train passe devant lui, à une vitesse de **60 km/h**. Le train mesure **0,25 km**. Deux minutes après que le train soit passé, le serre-frein, dans sa cabine à l'arrière du train, allume une cigarette. Quelles sont alors les coordonnées du serre-frein pour le machiniste et le chef de gare ?

Nb : Un **serre-frein** (ou garde-frein) était un agent de chemin de fer dont le travail consistait à serrer et desserrer manuellement les freins des wagons ou des voitures d'un train

[Solution](#)

Exercice 15 (réf 235)

Un homme assis dans un train allume deux cigarettes à **10 min** d'intervalle. Quelle est la distance parcourue par le train entre l'allumage des 2 cigarettes pour un observateur au sol, sachant que la vitesse du train est de **20 m/s** ?

Solution

Exercice 16 (réf 236)

Une masse sphérique de 1 kg se déplace le long de l'axe des x , avec une vitesse de 3 m/s . Elle entre en collision élastique avec une masse identique, auparavant immobile. Après le choc, les deux masses se déplacent toujours le long de l'axe des x .

- Quelles sont, dans le référentiel du laboratoire, les quantités de mouvement totales avant et après le choc ?
- Calculer l'énergie totale, avant et après le choc.
- Calculer les quantités de mouvement et énergie totales, avant et après le choc, mesurées par un observateur en mouvement vers les x positifs à la vitesse de $1,5\text{ m/s}$.
- Calculer les quantités de mouvement et énergie totales, avant et après le choc, mesurées par un observateur se déplaçant sur l'axe des y , vers les y négatifs, à la vitesse de 2 m/s .

Solution

Exercice 17 (réf 237)

À l'instant où un bateau voguant vers l'Est à 5 m/s passe devant un quai, une personne sur ce quai jette un caillou vers le Nord. Ce caillou touche l'eau 6 secondes plus tard à 50 m du quai. Trouver les coordonnées du point de chute dans le référentiel du bateau.

Solution

Exercice 18 (réf 238)

Soit une collision élastique à une dimension, intervenant sur l'axe des x , pour un observateur O . Montrer, à l'aide des transformations classiques, que l'énergie cinétique mesurée dans le référentiel O' d'un observateur se déplaçant le long de l'axe des x , avec une vitesse constante u par rapport à O , est également conservée.

Solution

SOLUTIONS DES EXERCICES du Chapitre 1 de Schaum (Gautreau / Savin) Physique Moderne

Les transformations galiléennes

Les transformations galiléennes - Solutions des exercices

Solution 1(ref 221)

Afin de s'habituer aux notations, rappelons qu'on souhaite obtenir les coordonnées sous la forme (x, y, z, t) .

a) Pour l'homme immobile sur le quai de la gare, l'oiseau se trouve à $x = 800 \text{ m}$ et à $t = 20 \text{ s}$. Donc $(x, y, z, t) = (800 \text{ m}, 0, 0, 20 \text{ s})$.

b) Pour l'homme dans le train, le train se rapproche de l'oiseau tout au long de ces 20 secondes. En l'occurrence, pendant 20 s, le train a avancé de $x = vt = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 20 \text{ s} = 600 \text{ m}$.

On applique simplement la transformation :

$$x' = x - vt = 800 \text{ m} - \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 20 \text{ s}\right) = 200 \text{ m}$$

Donc $(x', y', z', t') = (200 \text{ m}, 0, 0, 20 \text{ s})$.

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 2(ref 222)

a) Pour l'observateur immobile :

À $t_i = 20 \text{ s}$, temps initial, l'oiseau est à 800 m $(x_i, y_i, z_i, t_i) = (800 \text{ m}, 0, 0, 20 \text{ s})$

À $t_f = 25 \text{ s}$, temps final, l'oiseau est à 800 m $(x_f, y_f, z_f, t_f) = (850 \text{ m}, 0, 0, 25 \text{ s})$

La vitesse de l'oiseau est simplement donnée par $u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{850 - 800}{25 - 20} = +10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Le signe positif indiquant que l'oiseau vole vers les x positifs.

b) Pour l'observateur en déplacement, la transformation galiléenne donne pour $t_i = 20 \text{ s}$:

$$x' = x - vt = 800 \text{ m} - \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 20 \text{ s}\right) = 200 \text{ m}$$

D'où, $(x'_i, y'_i, z'_i, t'_i) = (200 \text{ m}, 0, 0, 20 \text{ s})$

La transformation galiléenne donne pour $t_f = 25 \text{ s}$:

$$x' = x - vt = 850 \text{ m} - \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 25 \text{ s}\right) = 100 \text{ m}$$

D'où, $(x'_f, y'_f, z'_f, t'_f) = (100 \text{ m}, 0, 0, 25 \text{ s})$

La vitesse de l'oiseau est simplement donnée par $u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x'_f - x'_i}{t'_f - t'_i} = \frac{100 - 200}{25 - 20} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Le signe 'moins' provient du fait que le train allant plus vite que l'oiseau, l'oiseau avance vers les x négatifs vu par le passager du train.

Ceci est parfaitement compatible avec les transformations galiléennes pour les vitesses :

$$u' = u - v = +10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

[Retour à l'énoncé](#)**Solution 3**(ref 223)

Soit O , l'observateur au repos dans le laboratoire et O' , l'observateur au repos par rapport à la particule dont la vitesse est $0,6 c$. Alors $u_x = -0,7 c$ (vers les x négatifs) et $v = 0,6 c$.

On applique les transformations galiléennes pour les vitesses :

$$u'_x = u_x - v = -0,7 c - 0,6 c = -1,3 c$$

On sait aujourd'hui que justement, les transformations galiléennes ne sont pas applicables pour des objets se déplaçant à des vitesses proches de celles de la vitesse de la lumière. Le résultat ci-dessus est donc incompatible avec la relativité restreinte.

[Retour à l'énoncé](#)**Solution 4**(ref 224)

a) Dans le référentiel de la gare, les coordonnées de l'éclair sont trivialement :

$$(1km, 0, 0, 20s)$$

b) Dans le référentiel du train, commençons par calculer la distance parcourue par le train qui roule à $60 km/h$) pendant $20 s$: $vt = \frac{60000 m}{3600 s} \cdot 20 s \approx 333 m = \frac{1}{3} km$.

On applique les transformations galiléennes:

$$x' = x - vt = 1 km - \frac{1}{3} km = \frac{2}{3} km$$

[Retour à l'énoncé](#)**Solution 5**(ref 225)

La première chose à faire est de calculer le temps que met la balle pour parcourir la distance entre le chasseur et le daim, c'à d 250 m à 1800 km/h.

$$t = t' = \frac{d}{v} = \frac{250 m}{\frac{1800000 m}{3600 s}} = \frac{250 \cdot 3600}{1800000} s = \frac{900000}{1800000} s = \frac{1}{2} s$$

On applique les transformations galiléennes :

$$x' = x - vt$$

Mais attention, dans ce problème, la composante de x vaut $d \cos(45^\circ)$ et de plus, elle est négative (voir dessin).

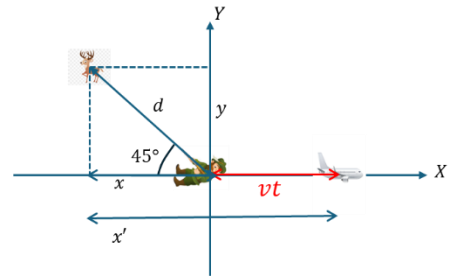
Donc

$$x' = x - vt = -250 \cos(45^\circ) - \frac{600000}{3600} \cdot \frac{1}{2} = -260,11 m$$

Quant à y' , vu que l'avion ne vole que le long de x , il n'a pas de composante de vitesse selon y et donc il reste $y' = y = d \sin(45^\circ) = 250 \cdot 0,707 = 176,8 \text{ m}$.

L'altitude z n'étant pas précisée, on la laisse à 0 (même si cela n'est pas évidemment pas réaliste pour un avion ...) et donc $z' = z = 0$.

Et donc, les coordonnées du daim dans le référentiel de l'avion sont : $(-260,11 \text{ m}, 176,8 \text{ m}, 0 \text{ m}, \frac{1}{2} \text{ s})$



[Retour à l'énoncé](#)

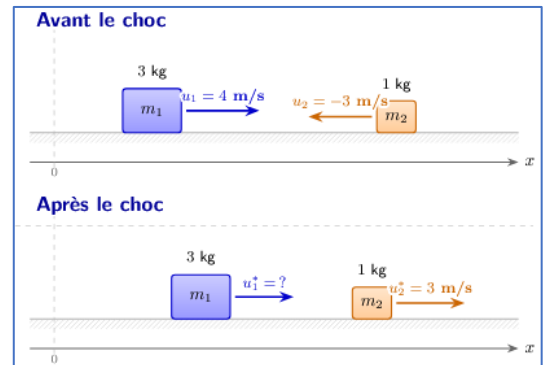
Solution 6(ref 226)

- a) L'équation de la conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1^* + m_2 u_2^*$$

Donc :

$$\begin{aligned} (3 \text{ kg}) \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + (1 \text{ kg}) \left(-3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \\ = (3 \text{ kg}) \left(u_1^* \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + (1 \text{ kg}) \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \\ \Leftrightarrow 12 - 3 = 3 u_1^* + 3 \\ \Leftrightarrow 6 = 3 u_1^* \Rightarrow u_1^* = 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$



- b) On applique simplement les lois de transformation galiléennes pour les vitesses :

$$\begin{aligned} \text{a. } u_1' &= u_1 - v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{b. } u_2' &= u_2 - v = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{c. } u_1^* &= u_1^* - v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{d. } u_2^* &= u_2^* - v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Deux choses intéressantes sont à remarquer :

La première est que $u_1^* = 0$. C'est normal puisque l'observateur avance lui aussi à $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Il est donc dans le même référentiel que la masse m_1 après le choc.

La seconde est de constater que bien sûr la quantité de mouvement est aussi **conservée** pour cet observateur, à savoir ;

$$(3 \text{ kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + (1 \text{ kg}) \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = (3 \text{ kg}) \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + (1 \text{ kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Leftrightarrow 1 = 1$$

Par contre la valeur de cette quantité de mouvement n'est pas la même selon le référentiel utilisé !

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 7(ref 227)

- a) Du point de vue de l'enfant, c'est comme s'il était au repos et jette simplement une balle en l'air avec une vitesse initiale verticale et l'équation du mouvement est donc classiquement : $y' = v_0 t' + \frac{at'^2}{2} = \left(6 \frac{m}{s}\right) \cdot t' + \frac{1}{2} \left(-g \frac{m}{s^2}\right) (t')^2 \stackrel{g=10}{=} 6 t' - 5 t'^2$

Rien ne se passe (du point de vue de l'enfant !) selon X , donc $x' = 0$.

- b) Du point de vue de l'observateur situé au bord de la route, la situation est différente puisque la balle a cette fois une vitesse initiale horizontale égale à la vitesse de la voiture. Par contre vu que la voiture ne se déplace évidemment pas verticalement, il n'y aura pas de différence dans les équations selon Y !

Donc, $y = y' = 6 t' - 5 t'^2 = 6 t - 5 t^2$ (vu que $t = t'$ pour les transformations galiléennes).

Selon l'axe X : $x = x' + vt = 0 + \left(30 \frac{m}{s}\right) \cdot t = 30 t$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 8(ref 228)

On écrit tout d'abord l'équation du mouvement de la masse attachée au ressort, pour un observateur au repos par rapport à la surface :

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -k(x - x_0) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Pour déterminer l'équation du mouvement pour le second observateur, nous appliquons les transformations galiléennes :

$$x = x' + vt; x_0 = x'_0 + vt; \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt'^2}; t = t'$$

Que l'on substitue dans l'équation ci-dessus. Elle devient donc :

$$-k(x' + vt - x'_0 - vt) = m \frac{d^2 x'}{dt'^2} \Leftrightarrow -k(x' - x'_0) = m \frac{d^2 x'}{dt'^2}$$

On constate qu'avant et après transformation galiléenne, les 2 équations du mouvement ont exactement les mêmes formes. On peut donc dire qu'elles sont invariantes par rapport aux transformations galiléennes.

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 9(ref 229)

Partons de $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ dont on veut montrer qu'elle change de forme dès lors qu'on l'exprime dans R' .

On considère un référentiel $R(x, y, z, t)$ et un référentiel $R'(x', y', z', t')$ en translation uniforme à la vitesse V selon l'axe x par rapport à R . La transformation galiléenne s'écrit :

$$x' = x - Vt \quad (1)$$

$$y' = y \quad (2)$$

$$z' = z \quad (3)$$

$$t' = t \quad (4)$$

Dans R , le champ en x, y, z au temps t vaut $\phi(x, y, z, t)$. Dans R' , et au **même point**, il prend pour valeur $\phi'(x', y', z', t')$ qui est bien sûr la même valeur (puisque au même point), mais simplement, dans R' , ce point a pour nouvelle coordonnée (x', y', z', t') .

$$\text{Donc } \phi(x, y, z, t) = \phi'(x', y', z', t') \quad (5)$$

Traitions d'abord les **dérivées spatiales** :

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y, z, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x} \right) \stackrel{(5)}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi'(x', y', z', t')}{\partial x} \right)$$

Or, avec les transformations galiléennes, on sait que : $x' = x'(x, y, z, t)$; $y' = y'(x, y, z, t)$; $z' = z'(x, y, z, t)$; $t' = t'(x, y, z, t)$.

D'autre part, la règle des dérivations en chaîne implique :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \quad (6)$$

$$\text{Or : } \frac{\partial x'}{\partial x} \stackrel{(1)}{=} 1 ; \frac{\partial y'}{\partial x} \stackrel{(2)}{=} 0 ; \frac{\partial z'}{\partial x} \stackrel{(3)}{=} 0 ; \frac{\partial t'}{\partial x} \stackrel{(4)}{=} 0 \text{ et donc, } \boxed{\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}}$$

$$\text{En redérivant encore une fois, il s'ensuit : } \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

Pour y et z , c'est encore plus simple puisque $y = y'$ et $z = z'$, il s'ensuit automatiquement que $\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$.

Pour l'instant, nous avons donc prouvé que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2}$ ce qui est un bon départ pour prouver l'invariance galiléenne. Mais il reste encore $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ à vérifier !

Comme pour (6), appliquons la règle de dérivation en chaîne pour le temps t :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

On a : $\frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial z'}{\partial t} \stackrel{(2) \text{ et } (3)}{=} 0$; $\frac{\partial t'}{\partial t} \stackrel{(4)}{=} 1$; $\frac{\partial x'}{\partial t} = -V$

Donc, $\frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$

On veut calculer $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Il faut donc refaire une fois la dérivée par rapport au temps.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-V \frac{\partial}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(-V \frac{\partial}{\partial x'} \right) \stackrel{V \text{ est cste}}{=} -V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) = -V \left[-V \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) \right] = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - V \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'}$$

$$b) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right) = -V \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right) + \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right) = -V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, au final : } \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-V \frac{\partial}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right) = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - V \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} - V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &= V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \end{aligned}$$

L'équation de départ dans R : $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ devient donc dans R' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \left(V^2 \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t' \partial x'} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} + \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t' \partial x'} &= 0 \end{aligned}$$

Et c'est fini ! En effet, on constate que par rapport à l'équation d'onde de départ, un coefficient $\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$ s'est rajouté au facteur $\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2}$, mais cela n'est pas le plus « grave ».

C'est surtout qu'un terme $\frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t' \partial x'}$ s'est rajouté à l'équation, lequel n'existait pas dans l'équation initiale !

Ceci est lourd de conséquence car c'est très précisément ce calcul qui a fait douter les physiciens (Lorentz, Poincaré, Einstein, etc) pendant une dizaine d'année : était-ce les équations de Maxwell qui étaient fausses ? Ou est-ce que les transformations de Galilée ne sont pas les bonnes transformations entre référentiels inertiels lorsque les phénomènes électromagnétiques sont concernés ? C'est la deuxième réponse qui sera la bonne et donnera lieu aux transformations de Lorentz.

[Retour à l'énoncé](#)

Pour le passager (situé 6 m derrière le coup de flash), les coordonnées sont $(x', t') = (6m, 2s)$.

Pour l'homme immobile sur le trottoir, la voiture (et donc, son passager assis à l'arrière) s'est déplacée à la vitesse de 18 m/s pendant 2 s, soit $x = vt = 18 * 2 = 36 m$. Ceci est la coordonnée du passager ! Il faut donc rajouter 6 m pour avoir la coordonnée du coup de flash vu de l'observateur immobile, soit $x = 36m + 6m = 42m$.

Dans O , les coordonnées sont donc $(x, t) = (42m, 2s)$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 11(ref 231)

On utilise la composition des vitesses, à savoir : $u = u' + v$

où u est la vitesse du daim par rapport au sol, v est la vitesse de l'enfant et on cherche u' , la vitesse du daim par rapport à l'enfant.

$$\text{Ici, } u' = u - v = 40 \frac{hm}{h} - 16 \frac{km}{h} = 24 \frac{km}{h}$$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 12(ref 232)

On utilise la composition des vitesses, à savoir : $u = u' + v$

où $u' = 40km/h$ (vitesse de la balle dans le train) ; $v = 160 km/h$ (vitesse du train par rapport au sol).

$$\Rightarrow u = u' + v = 40 \frac{km}{h} + 160 \frac{km}{h} = 200 km/h \text{ qui représente la vitesse de la balle par rapport au sol.}$$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 13(ref 233)

On utilise la composition des vitesses, à savoir : $u = u' + v$

où $u' = -4 km/h$ (vitesse du passager qui marche en **sens inverse** dans le train) ; $v = 120 km/h$ (vitesse du train par rapport au sol).

$$\Rightarrow u = u' + v = -4 \frac{km}{h} + 120 \frac{km}{h} = 116 km/h \text{ qui représente la vitesse du passager marchant en sens inverse de la marche du train, } \underline{\text{par rapport au sol.}}$$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 14(ref 234)

Les coordonnées du « serre-frein » à l'arrière du train, par rapport au machiniste sont bien sûr $(x', t') = (-250 \text{ m}, 2 \text{ min})$

En 2 minutes et à la vitesse de 60 km/h, le train parcourt $x = vt = \frac{60\,000\text{m}}{60 \text{ min}} \cdot 2 = 2000 \text{ m}$.

Mais ceci, c'est par rapport au machiniste à l'avant. Il faut encore retirer 250 m pour avoir la coordonnée par rapport au 'serre-frein', càd $2000 \text{ m} - 250 \text{ m} = 1750 \text{ m}$.

Les coordonnées du serre-frein par rapport au chef de gare sont donc :

$$(x, t) = (1750\text{m}, 2\text{min})$$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 15(ref 235)

Il s'agit simplement de la distance parcourue par le train qui roule à 20 m/s pendant 10 minutes, à savoir : $x = v \cdot t = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6000 \text{ s} = 12\,000 \text{ m} = 12 \text{ km}$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 16(ref 236)

Notons $m_1 = 1\text{kg}$; $u_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $m_2 = 1 \text{ kg}$; $u_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

a) Avant le choc : $P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (1) \cdot (3) + (1) \cdot (0) = 3 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

La quantité de mouvement étant conservée, c'est aussi $3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ après le choc.

b) Avant le choc : $E_T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1 \cdot (3)^2}{2} + 0 = 4,5 \text{ J}$

L'énergie totale étant conservée, c'est aussi $4,5 \text{ J}$ après le choc.

c) L'observateur avance à la vitesse $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Avant le choc, on a donc : $u_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $u_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ et $v = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Appliquons les transformations galiléennes :

$$u_1 = u'_1 + v \Rightarrow u'_1 = u_1 - v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$u_2 = u'_2 + v \Rightarrow u'_2 = u_2 - v = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Pour l'observateur en mouvement :

$$P = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = (1) \cdot (1,5) + (1) \cdot (-1,5) = 0 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s} !$$

Cela est-il surprenant ? Pas vraiment !

Pour l'observateur en mouvement la masse m_1 avance à $1,5 \text{ m/s}$ tandis que la masse m_2 , **recule** de $1,5 \frac{m}{s}$. En réalité, le fait que la quantité de mouvement soit nulle reflète le fait que l'observateur avance à la même vitesse que le centre de masse du système $m_1 m_2$!

L'énergie totale, vue par l'observateur en mouvement vaut :

$$E'_T = \frac{m_1 u_1'^2}{2} + \frac{m_1 u_1'^2}{2} = \frac{1 \cdot (1,5)^2}{2} + \frac{1 \cdot (-1,5)^2}{2} = 2,25 \text{ J}$$

Encore une fois, tant les quantités de mouvement que l'énergie totale étant conservées, ces valeurs sont les mêmes après le choc...

d) 1°) Il s'agit d'une transformation galiléenne à 2 dimensions (càd dans 1 plan).

Comme d'habitude : $u = u' + v \Rightarrow u' = u - v$

Mais ici, $u_1 = (3,0)$ càd que la masse m_1 avance à 3 m/s selon X et $0 \frac{m}{s}$ selon Y .

$u_2 = (0,0)$ car la masse m_2 est au repos.

$v = (0, -2)$ car la vitesse de l'observateur est de $2 \frac{m}{s}$ vers les **Y négatifs** !

Donc,

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 - v = (3,0) - (0,-2) = (3,2) \frac{m}{s} \\ u'_2 &= u_2 - v = (0,0) - (0,-2) = (0,2) \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Et donc $\overrightarrow{P(x,y)} = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = 1(3,2) + 1(0,2) = (3,2) + (0,2) = (3,4)$

Et la norme de ce vecteur vaut $|\vec{P}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ kg} \frac{m}{s}$

Cette valeur plus grande que les précédentes obtenues est normale ! En effet, dans les cas précédents, l'observateur mobile était tantôt au repos tantôt en mouvement qui 'accompagnait' la collision dans le même sens. Dans ce cas, lorsque l'observateur **s'éloigne** perpendiculairement à la collision, sa vitesse relative par rapport à celles des masses en mouvement augmente, et donc la quantité de mouvement également.

2°) L'énergie totale vaut :

$$E'_T = \frac{m_1 u_1'^2}{2} + \frac{m_1 u_2'^2}{2} = \frac{(1) u_1'^2}{2} + \frac{(1) u_2'^2}{2} = \frac{u_1'^2}{2} + \frac{u_2'^2}{2}$$

Or $u'_1 = (3,2) \frac{m}{s} \Rightarrow u_1'^2 = 3^2 + 2^2 = 13$; $u'_2 = (0,2) \frac{m}{s} \Rightarrow u_2'^2 = 0^2 + 2^2 = 4$

Donc,

$$E'_T = \frac{u_1'^2}{2} + \frac{u_2'^2}{2} = \frac{13}{2} + \frac{4}{2} = \frac{17}{2} = 8,5 \text{ J}$$

Au passage de cet exercice, il est important de noter, comme vous l'avez constaté que la quantité de mouvement ainsi que l'énergie dépendent du référentiel. Et donc ces grandeurs ne sont pas des invariants galiléens ! Mais attention encore, ces quantités, bien que différentes selon le référentiel, sont conservées dans tous les référentiels !

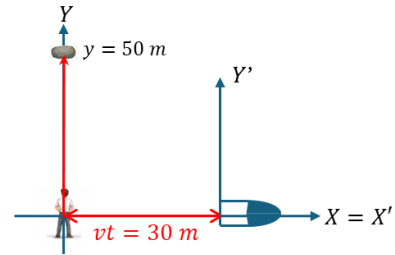
[Retour à l'énoncé](#)

Solution 17(ref 237)

Entre le moment où le caillou est lancé ($t = 0$) et le moment où il touche l'eau, il s'écoule 6 s. Pendant ce temps, le bateau qui avance à 5 m/s aura parcouru :

$$x = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6 = V \cdot t = 30 \text{ m}.$$

La visualisation après 6 s est donc celle-ci :



Dans le référentiel X', Y' du bateau, les coordonnées du caillou sont donc $x' = -30 \text{ m}$; $y' = 50 \text{ m}$; $t = 6 \text{ s}$

[Retour à l'énoncé](#)

Solution 18(ref 238)

Dans le référentiel R au repos :

Il faut essentiellement faire attention aux confusions de notation pour ne pas s'emmêler. On note u_1 et u_2 les vitesses des masses m_1 et m_2 AVANT collision et u'_1 et u'_2 les vitesses des masses m_1 et m_2 APRÈS collision.

On sait que dans ce repère, la quantité de mouvement est conservée (on va s'en servir). Donc :

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2 \quad (1)$$

De même, l'énergie cinétique est conservée. Donc :

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 u'^2_2 \quad (2)$$

Dans le référentiel R' en mouvement à la vitesse V:

On note w_1 et w_2 les vitesses des masses m_1 et m_2 AVANT collision et w'_1 et w'_2 les vitesses des masses m_1 et m_2 APRÈS collision.

Le référentiel R' avançant à la vitesse V , on a :

$$u_1 = V + w_1 \Rightarrow w_1 = u_1 - V \text{ et de même ; } w_2 = u_2 - V ; w'_1 = u'_1 - V ; w'_2 = u'_2 - V$$

Dans ce repère R' et AVANT collision, l'énergie cinétique vaut donc :

$$\begin{aligned} E'_c(\text{avant}) &= \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (u_1 - V)^2 + \frac{1}{2} m_2 (u_2 - V)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - m_1 u_1 V + \frac{1}{2} m_1 V^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - m_2 u_2 V + \frac{1}{2} m_2 V^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - V(m_1 u_1 + m_2 u_2) + \frac{1}{2} V^2 (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

De même, dans ce repère R' et **APRÈS** collision, l'énergie cinétique vaut :

$$\begin{aligned}
 E'_c(\text{après}) &= \frac{1}{2}m_1w_1'^2 + \frac{1}{2}m_2w_2'^2 = \frac{1}{2}m_1(u_1' - V)^2 + \frac{1}{2}m_2(u_2' - V)^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_1u_1'^2 - m_1u_1'V + \frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 - m_2u_2'V + \frac{1}{2}m_2V^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 - V(m_1u_1' + m_2u_2') + \frac{1}{2}V^2(m_1 + m_2)
 \end{aligned}$$

Grâce à (2), on sait que $\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2$.

Grâce à (1), on sait que $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1u_1' + m_2u_2'$

Donc, tous les termes de $E'_c(\text{avant})$ égalent les termes de $E'_c(\text{après})$, ce qui démontre la conservation de l'énergie cinétique indépendamment du référentiel galiléen. Attention, encore une fois, je précise que ce qu'on a démontré c'est le principe de conservation de l'énergie cinétique indépendamment du repère galiléen, MAIS la valeur de cette énergie va clairement, elle, dépendre du référentiel (voir [l'exercice 16](#) pour s'en convaincre)

[Retour à l'énoncé](#)
