Paramétrisation des courbes dans le plan

Équations paramétriques

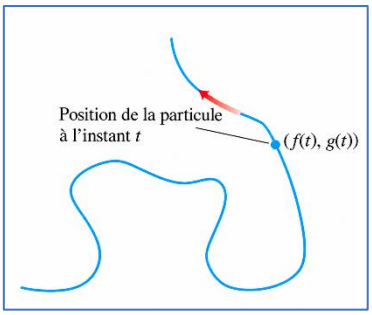

Figure 1

La figure 1 représente la trajectoire d'une particule en mouvement dans le plan XY. Remarquons que cette trajectoire ne satisfait pas au test de la droite verticale : elle ne peut donc pas être décrite comme le graphe d'une fonction de la variable x.
Cependant, nous pouvons décrire cette trajectoire à l'aide d'un système de deux équations, $x = f(t)$ et $y = g(t)$, où f et g sont des fonctions continues. Dans l'étude du mouvement, t désigne généralement le temps. **Des équations de ce type permettent de décrire des courbes plus générales que celles qui peuvent être représentées par une seule fonction**. Elles fournissent non seulement le graphe de la trajectoire parcourue, mais aussi la position de la particule $(x, y) = (f(t), g(t))$ à chaque instant t.

DÉFINITION

Si x et y sont définies comme des fonctions

$$x = f(t) \text{ et } y = g(t)$$

sur un intervalle I de valeurs de t, alors l'ensemble des points $(x, y) = (f(t), g(t))$ définis par ces équations constitue une courbe paramétrée.
Les équations sont appelées les **équations paramétriques** de la courbe.

La variable t est un paramètre de la courbe, et son domaine I est appelé intervalle des paramètres. Si I est un intervalle fermé, $a \leq t \leq b$, le point $(f(a), g(a))$ est le point initial de la courbe et le point $(f(b), g(b))$ en est le point terminal.
Lorsque nous donnons les équations paramétriques d'une courbe ainsi qu'un intervalle de paramètres, nous disons que nous avons paramétré la courbe. Les équations et l'intervalle constituent ensemble une paramétrisation de la courbe.
Une même courbe peut être représentée par différents systèmes d'équations paramétriques

Exemple 1

Esquisser la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) , \qquad y = t, \qquad 0 \leq t \leq 6$$

Solution 1

Nous établissons un tableau de valeurs (tableau ci-dessous), plaçons les points (x, y) puis traçons une courbe lisse passant par ces points (figure 2).

Si nous considérons cette courbe comme la trajectoire d'une particule en mouvement, celle-ci part à l'instant $t = 0$ du point initial $(0,0)$ puis se déplace vers le haut en suivant une trajectoire ondulée, jusqu'à atteindre le point final $(0,6)$ à l'instant $t = 6$.

Le sens du mouvement est indiqué par les flèches rouges.

t	x	y
0	0	0
1	1	1
2	0	2
3	-1	3
4	0	4
5	1	5
6	0	6

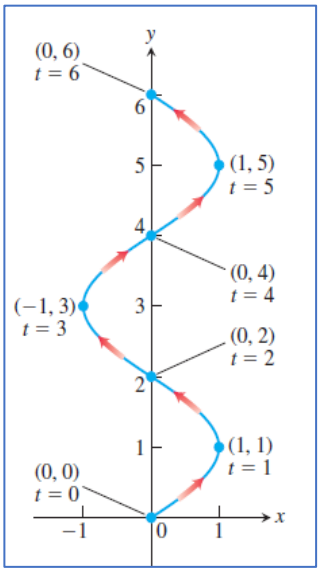

Figure 2

Exemple 2

Esquisser la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = t^2 , \qquad y = t + 1, \qquad -\infty \leq t \leq \infty$$

Solution 2

Nous dressons un tableau de valeurs, plaçons les points (x, y) dans un repère, puis traçons une courbe lisse passant par ces points (figure 3). Nous considérons cette courbe comme la

trajectoire suivie par une particule, qui se déplace le long de celle-ci dans le sens indiqué par les flèches.

Bien que les intervalles de temps dans le tableau soient égaux, les distances mesurées le long de la courbe entre deux points consécutifs ne sont pas égales. Cela s'explique par le fait que la particule ralentit à mesure qu'elle se rapproche de l'axe des y, en suivant la branche inférieure de la courbe lorsque t augmente. Puis, après avoir atteint l'axe des y au point $(0,1)$, elle accélère en se déplaçant le long de la branche supérieure.

Puisque l'ensemble des valeurs possibles de t est constitué de tous les nombres réels, la courbe ne possède ni point initial ni point terminal.

t	x	y
-3	9	-2
-2	4	-1
-1	1	0
0	0	1
1	0	2
2	4	2
3	9	4

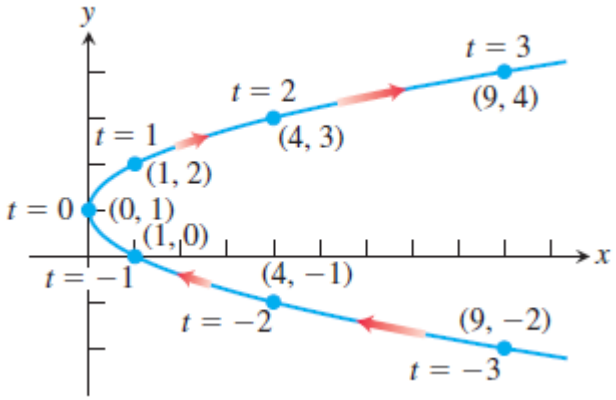

Figure 3

Dans cet exemple, nous pouvons utiliser des manipulations algébriques pour éliminer le paramètre t et obtenir une équation algébrique de la courbe faisant intervenir uniquement x et y.

Nous exprimons t en fonction de y à partir de l'équation $y = t + 1$ puis nous substituons l'expression obtenue, $t = y - 1$ dans l'équation donnant x. Nous obtenons ainsi :

$$x = y^2 = (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1$$

L'équation $x = y^2 - 2y + 1$ représente une parabole, comme le montre la figure ci-dessus.

Notez qu'il est parfois très difficile, voire impossible, d'éliminer le paramètre d'un système de deux équations paramétriques comme nous venons de le faire ici.

Exemple 3

Esquisser la courbe définie par les équations paramétriques

a) $x = \cos t \ , \ y = \sin t \, , \ 0 \leq t \leq 2\pi$
b) $x = a \cos t \ , \ y = a \ \sin t \, , \ 0 \leq t \leq 2\pi$

Solution 3

a) On observe facilement que $x^2 = \cos^2 t$ et $y^2 = \sin^2 t$
et donc : $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ qui est l'équation d'un cercle de rayon 1 (*figure 4*)
Dès lors, lorsque $t = 0, (x, y) = (1,0)$ et au fur et à mesure que t augmente, se dessine le cercle de rayon 1 dans le sens anti-horloger.

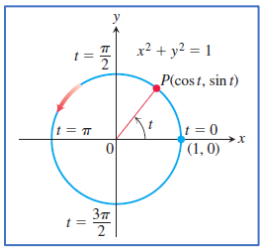

Figure 4

b) On observe facilement que $x^2 = a^2\cos^2 t$ et $y^2 = a^2 \sin^2 t$
et donc : $x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$ qui est l'équation d'un cercle de rayon $|a|$.
Dès lors, lorsque $t = 0, (x, y) = (a, 0)$ et au fur et à mesure que t augmente, se dessine le cercle de rayon $|a|$ dans le sens anti-horloger.

Exemple 4

La position $P(x, y)$ d'une particule se déplaçant dans le plan XY est donnée par les équations et l'intervalle du paramètre suivants :

$$x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$$

Déterminer la trajectoire suivie par la particule et décrire son mouvement.

Solution 4

Nous essayons d'identifier la trajectoire en éliminant le paramètre t entre les équations $x = \sqrt{t}$ et $y = t$, ce qui pourrait permettre d'obtenir une relation algébrique reconnaissable entre x et y. Nous trouvons que :

$$y = t, \text{ or } x = \sqrt{t}, \text{ donc } t = x^2, \text{ et finalement, } \boldsymbol{y = x^2}$$

Ainsi, les coordonnées de la position de la particule vérifient l'équation $y = x^2$. La particule se déplace donc le long de la parabole d'équation $y = x^2$.
Il serait toutefois erroné de conclure que la trajectoire de la particule correspond à la parabole entière $y = x^2$! Elle n'en parcourt que la moitié. En effet, la coordonnée x de la particule ne peut jamais être négative (vu que $x = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$).
La particule part du point $(0,0)$ à l'instant t=0, puis s'élève dans le premier quadrant lorsque t augmente (figure 5).
L'intervalle du paramètre est $[0, +\infty[$ et il n'y a pas de point final.

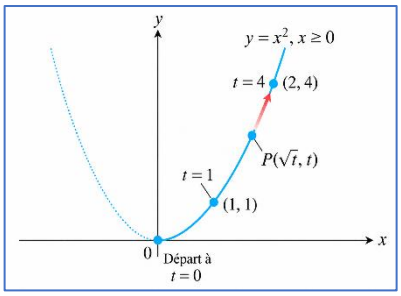

Figure 5

Exemple 5

C'est une variante de l'exemple 4.
Une paramétrisation de la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ est donnée par :

$$x = t \ ; \ y = f(t) = t^2 \ ; \ -\infty < t < \infty$$

Lorsque $t = 0$, cette paramétrisation décrit le même trajet dans le plan XY que celui obtenu dans l'exemple 4. Cependant, puisque le paramètre t peut désormais également prendre des valeurs négatives, on obtient aussi la partie gauche de la parabole ; autrement dit, on obtient la parabole tout entière.
Pour cette paramétrisation, il n'y a ni point de départ ni point d'arrivée (figure 6).

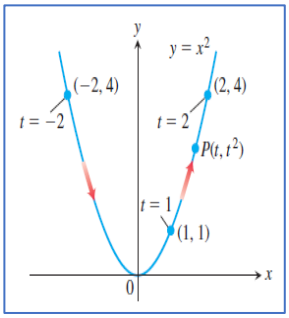

Figure 6

Remarquons qu'une paramétrisation précise également l'instant auquel une particule se déplaçant le long d'une courbe se trouve en un point donné de cette courbe. Dans l'exemple 4, le point $(2,4)$ est atteint lorsque $t = 4$; dans l'exemple 5, il est atteint « plus tôt », lorsque $t = 2$.
On peut comprendre les implications de cet aspect des paramétrisations en considérant la possibilité de collision entre deux objets : ils doivent se trouver exactement au même point $P(x, y)$, pour certaines valeurs (éventuellement différentes) de leurs paramètres respectifs.
Nous reviendrons plus en détail sur cet aspect des paramétrisations lorsque nous étudierons le mouvement dans un chapitre ultérieur.

Exemple 6

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point (a, b) et de coefficient directeur m.

Solution 6

Une équation cartésienne s'obtient en exploitant la définition de la pente :

$$m = \frac{y-b}{x-a} \Rightarrow y - b = m(x-a)$$

On peut alors définir $t = x - a$, d'où $\boldsymbol{x = a + t}$ et alors, $\boldsymbol{y = b + mt}$, $\quad -\infty < t < \infty$ pour paramétrer la droite.

Note : on aurait pu choisir, comme dans l'exemple 5, $x = t$ et alors $y = b + m(t - a)$

Ces deux paramétrisations décrivent la même droite.

Exemple 7

Esquisser et identifier la trajectoire décrite par le point $P(x, y)$ si :

$$x = t + \frac{1}{t} \quad , \quad y = t - \frac{1}{t} \quad , \quad t > 0$$

Solution 7

On peut commencer par faire un tableau (à l'aide d'Excel ou une calculatrice …) pour quelques valeurs de $t > 0$.

t	1/t	x	y
0.1	10	10.1	-9.9
0.2	5	5.2	-4.8
0.4	2.5	2.9	-2.1
1	1	2	0
2	0.5	2.5	1.5
5	0.2	5.2	4.8
10	0.1	10.1	9.9

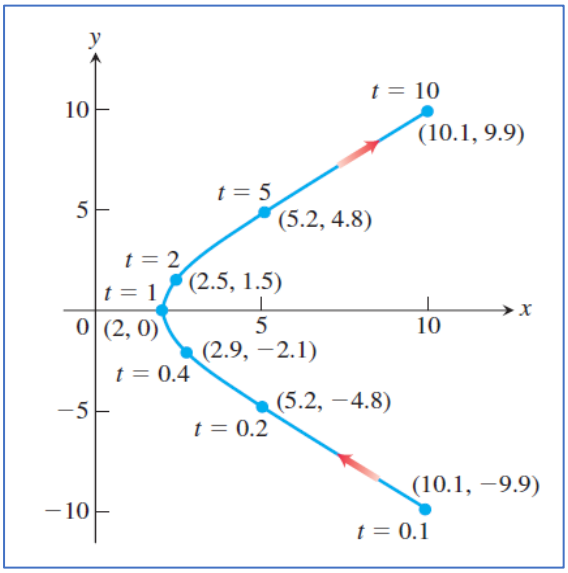

Figure 7

Comment trouver l'équation dans le plan XY ?

On peut remarquer que d'une part : $x + y = t + \frac{1}{t} + t - \frac{1}{t} = 2t$

Et d'autre part : $x - y = t + \frac{1}{t} - t + \frac{1}{t} = \frac{2}{t}$

Et donc $(x + y)(x - y) = 2t \cdot \frac{2}{t} = 4$. On a donc éliminé t !

De plus : $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Donc, au final : $x^2 - y^2 = 4$ est l'équation demandée.

Attention ! $x^2 - y^2 = 4$ est l'équation d'une hyperbole et admet donc formellement 2 branches : l'une du côtés des $x < 0$ et l'autre du côté des $x > 0$. Ce qui n'est pas le cas ici ! C'est normal, c'est simplement parce que par définition, au départ, on a imposé $x = t + \frac{1}{t}$ avec $t > 0$! Donc, x ne peut être que positif. Donc le fait que $\mathcal{D}om\ t =]0, \infty[$ implique qu'il n'y a ni point de départ, ni point d'arrivée pour le chemin étudié. Par exemple, lorsque t tend vers 0^+, x tend vers $+\infty$ et y tend vers $-\infty$.

Maintenant que nous avons 'découvert' que $x^2 - y^2 = 4$ est l'équation correspondant aux équations paramétriques

$$x = t + \frac{1}{t} \quad , \quad y = t - \frac{1}{t} \quad , \quad t > 0$$

on peut faire le chemin en arrière et se rendre compte qu'une autre manière plus directe de paramétriser $x^2 - y^2 = 4$ est de prendre $y = t$ et $x = \sqrt{4 + t^2}$ avec $-\infty < t < \infty$!

On peut même imaginer aller encore plus loin en utilisant l'identité trigonométrique $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, donc $4\sec^2 t - 4\tan^2 t = 4$ et donc par simple identification :

$x = 2\sec t$ et $y = 2\tan t$ mais comme on ne veut que la branche 'droite' des $x > 0$, il faut juste veiller au domaine de t qui dans ce cas sera $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.
On peut donc trouver autant d'équations paramétriques équivalents qu'on souhaite pour caractériser $x^2 - y^2 = 4$!

Cycloïdes

Le problème d'une horloge à pendule dont la masse oscille selon un arc de cercle est que la fréquence des oscillations dépend de leur amplitude. Plus l'oscillation est ample, plus la masse met de temps à revenir au centre (sa position la plus basse).
Ce phénomène ne se produit pas si l'on parvient à faire osciller la masse selon une courbe appelée cycloïde. En 1673, Christiaan Huygens conçut une horloge à pendule dont la masse oscillerait suivant une cycloïde, une courbe que nous définirons dans l'exemple 8. Il suspendit la masse à un fil fin, guidé par des butées qui forçaient le fil à s'enrouler à mesure que la masse s'éloignait de sa position centrale (figure 8). Nous décrirons cette trajectoire à l'aide d'équations paramétriques dans l'exemple suivant.

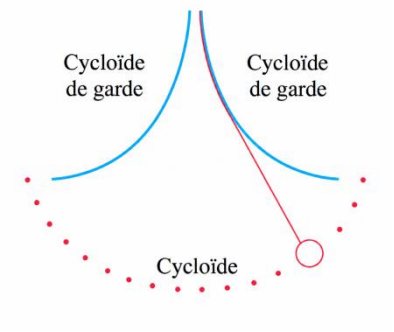

Figure 8

Exemple 8

Une roue de rayon a roule le long d'une droite horizontale. Déterminer les équations paramétriques de la trajectoire décrite par un point P situé sur la circonférence de la roue. Cette trajectoire est appelée cycloïde.

Solution 8

Nous choisissons l'axe des x comme étant la droite sur laquelle tourne la roue. Marquons un point P sur la roue, **plaçons initialement P à l'origine**, puis faisons rouler la roue vers la droite.
Nous utilisons comme **paramètre l'angle t qui détermine l'angle de rotation de la roue**, mesuré en radians. La figure ci-dessous représente la roue un peu plus tard, lorsque son point de contact avec le sol se trouve à une distance $a \cdot t$ de l'origine.
Nous avons donc :

a) **Au départ** : $P = (0,0)$, $t = 0$ (la roue n'a pas encore tourné) et θ qui est l'angle trigonométrique conventionnel, vaut $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Le centre C du cercle a pour coordonnées $C \equiv C(0, a)$

b) Lorsque la roue a **tourné d'un certain angle t**: la longueur d'arc parcourue et donc, la distance déroulée sur l'axe x (en jaune sur la figure) vaut $a \cdot t$ (car $longueur\ d'arc = rayon * angle\ (en\ radian)$). Le centre C du cercle a pour coordonnées $C \equiv C(at, a)$.

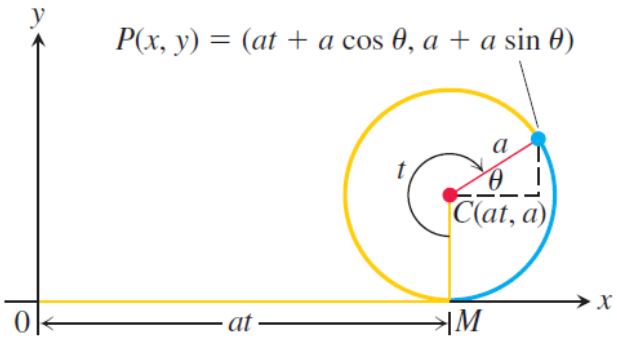

Figure 9

Les coordonnées de P sont :

$$x = at + a\,cos\theta \ , \ \ y = a + a\,sin\theta$$

Nous observons également qu'à tout instant, $t + \theta = \frac{3\pi}{2}$, donc $\boldsymbol{\theta = \frac{3\pi}{2} - t}$

Dès lors $\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -sin\,(t)$ et $sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos(t)$.

De sorte que $x = at + a\,cos\theta \ = at - a\sin(t)$ et $y = a + a\,sin\theta = a - a\cos(t)$

Et donc, la paramétrisation de la cycloïde est : $\boldsymbol{x = a(t - sin\,t)\,; y = a(1 - cos\,t)}$

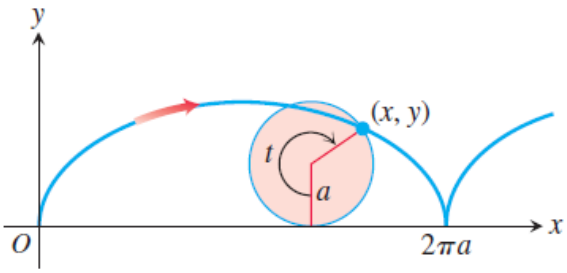

Figure 10 La cycloïde

Brachistochrones et tautochrones

Si l'on retourne la figure 10, les équations paramétriques de la cycloïde restent valables et la courbe obtenue (figure 11) possède deux propriétés physiques intéressantes.

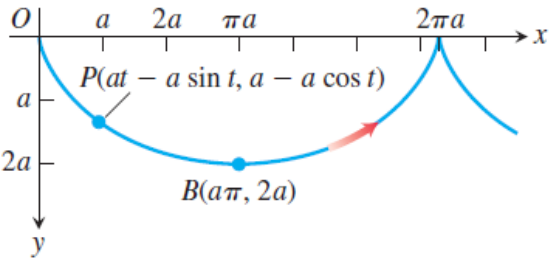

Figure 11

La première concerne l'origine O et le point B, situé au bas de la première arche. Parmi toutes les courbes lisses reliant ces deux points, la cycloïde est celle le long de laquelle une bille sans frottement, soumise uniquement à la force de gravité, glisse de O à B en un temps minimal. La **cycloïde** est donc une **brachistochrone**, c'est-à-dire une courbe de **temps minimal** reliant ces deux points.
La seconde propriété est que, même si l'on lâche la bille à partir d'un point situé à mi-parcours de la courbe en direction de B, elle mettra toujours le **même temps** pour atteindre B. La cycloïde est donc également une **tautochrone**, c'est-à-dire une courbe isochrone entre O et B. Cette propriété très étonnante à première vue est joliment illustrée sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_tautochrone#/media/Fichier:Tautochrone_curve.gif

Existe-t-il d'autres brachistochrones reliant O et B, ou la cycloïde est-elle la seule ?

Nous pouvons formuler cette question sous la forme d'un problème mathématique de la manière suivante. Au départ, l'énergie cinétique de la bille est nulle, puisque sa vitesse est nulle. Le travail effectué par la gravité lorsque la bille se déplace du point $(0,0)$ vers n'importe quel autre point (x,y) du plan est égal à mgy, et ce travail doit être égal à la variation de l'énergie cinétique (principe de conservation de l'énergie). Autrement dit :

$$mgy = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(0)^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow mgy = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gy}$$

Ainsi, la vitesse de la bille lorsqu'elle atteint le point (x,y) est donnée par $v = \sqrt{2gy}$
Autrement dit,

$$v = \frac{ds}{dT} = \sqrt{2gy} \Rightarrow dT = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\sqrt{2gy}} \qquad (\text{Éq. } 1)$$

où ds représente l'élément infinitésimal de longueur d'arc le long de la trajectoire de la bille et T désigne le temps.

Rappel explicatif :

D'après le théorème de Pythagore, la longueur infinitésimale ds vérifie :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \Leftrightarrow ds = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Le temps T_f nécessaire à la bille pour glisser le long d'une trajectoire donnée $y = f(x)$ du point O au point $B \equiv B(a\pi, 2a)$, est

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\, dx \qquad (\text{Éq. } 2)$$

Quelles courbes $y = f(x)$, s'il en existe, minimisent la valeur de cette intégrale ?

À première vue, nous pourrions penser que la ligne droite O à B permettrait d'obtenir le temps le plus court. Mais ce n'est peut-être pas le cas. Il pourrait être avantageux que la bille commence par descendre verticalement afin d'acquérir plus rapidement de la vitesse. Avec une vitesse plus élevée, la bille pourrait parcourir un chemin plus long et néanmoins atteindre B la première.
C'est effectivement la bonne intuition. La solution, issue d'une branche des mathématiques appelée calcul des variations, est que l'arc de cycloïde initial reliant O à B est l'unique brachistochrone entre ces deux points (figure 10.12).

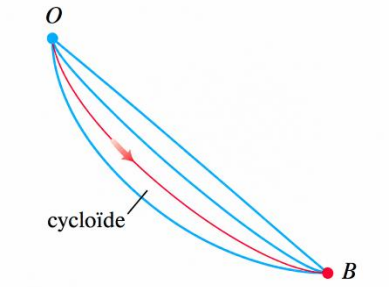

Figure 13 La cycloïde est l'unique courbe qui minimise le temps nécessaire à une bille, glissant sans frottement, pour aller du point 0 au point B.

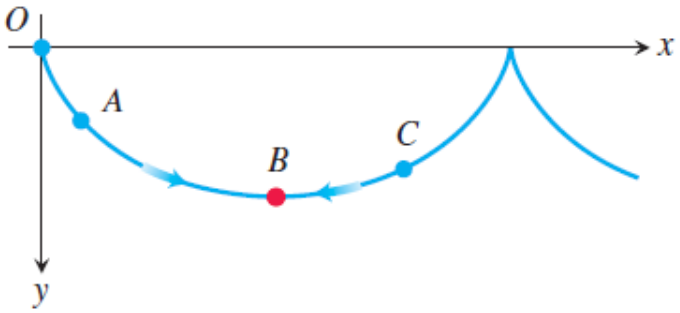

Figure 12 : Des billes lâchées simultanément aux points O, A et C sur la cycloïde renversée atteignent toutes le point B au même instant.

Dans la section suivante, nous montrerons comment déterminer l'élément différentiel de longueur d'arc ds pour une courbe paramétrée. Une fois que nous saurons calculer ds, nous pourrons déterminer le temps donné par le membre de droite de l'équation (Eq. 2) dans le cas de la cycloïde.

Ce calcul nous donnera le temps nécessaire à une bille, glissant sans frottement, pour descendre le long de la cycloïde jusqu'au point B, lorsqu'elle est lâchée sans vitesse initiale au point O. Ce temps s'avère égal à $T_f = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ où a est le rayon de la roue qui définit la cycloïde considérée.

De plus, si nous lâchons la bille depuis un point plus bas de la cycloïde, correspondant à une valeur du paramètre $t_0 > 0$ nous pouvons intégrer l'expression paramétrique de $ds/\sqrt{2gy}$, donnée par l'équation 1, sur l'intervalle $[t_0, \pi]$, afin de déterminer le temps nécessaire à la bille pour atteindre le point B.

Ce calcul donne exactement le même temps : $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. La bille met donc le même temps pour atteindre$B$, quel que soit son point de départ sur la cycloïde. Cette propriété fait de la cycloïde une **tautochrone**.

Par exemple, les billes lâchées simultanément aux points O, A et C de la figure 10.13 atteindront toutes le point B exactement au même instant.

C'est cette propriété qui explique pourquoi l'horloge à pendule de Huygens représentée à la figure 8 est indépendante de l'amplitude des oscillations.