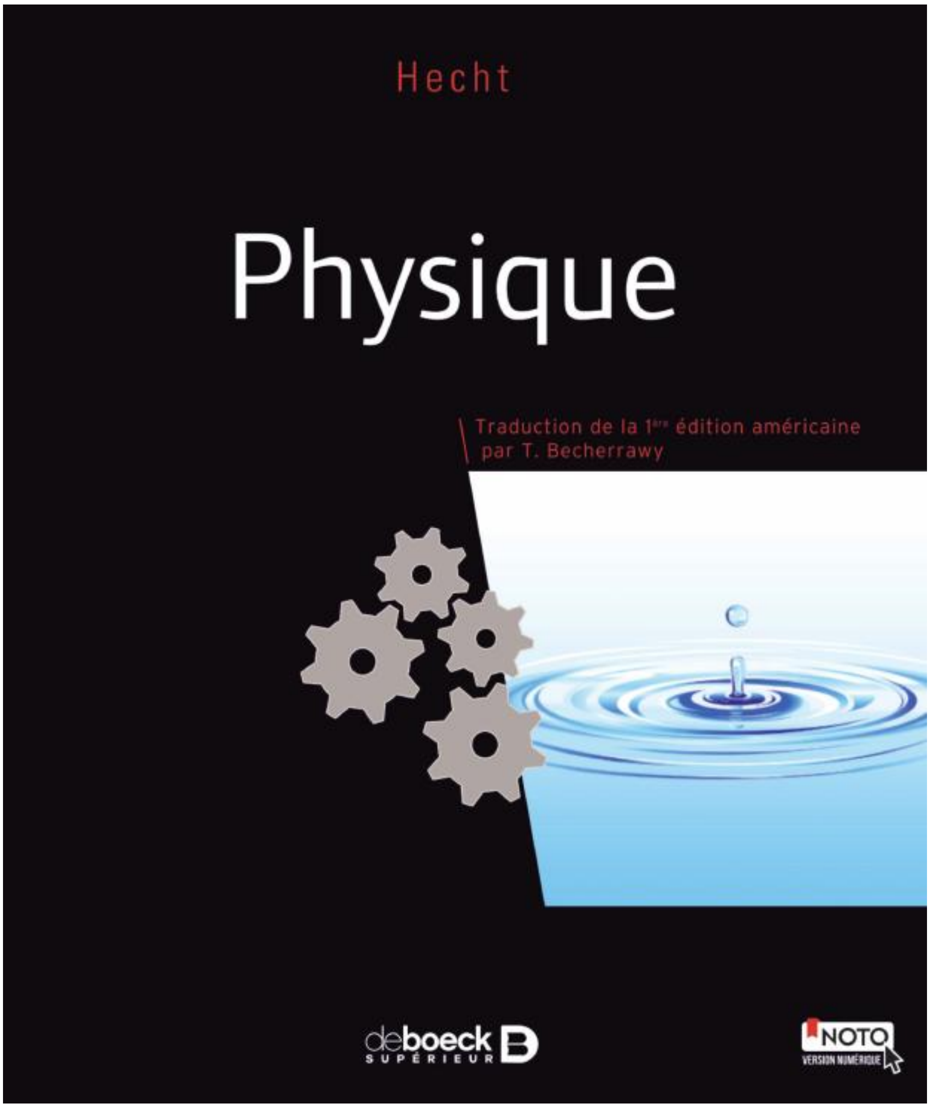
ÉNONCÉS D'EXERCICES ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS



PHYSIQUE (1 ère édition)
HECHT

Chapitre 7 : La gravité selon Newton

Partie Exercices

Corrigé par L. Hardy

La gravité selon Newton - Exercices

Exercice 1 *(réf 89)*

Que deviendrait le poids d'un objet, si sa masse était doublée et sa distance au centre de la Terre était aussi doublée ?

Solution

Exercice 2 *(réf 90)*

L'attraction gravitationnelle entre un boulet de canon de 20 kg et une bille est de $1{,}48 \times 10^{-10} N$, lorsque leurs centres sont distants de 30 cm. Calculer la masse de la bille.

Solution

Exercice 3 *(réf 91)*

Supposons que deux petites sphères identiques, dont les centres sont distants de 1,00 m, éprouvent une force de gravitation mutuelle de 1,00 N. Calculer la masse de chacune des sphères.

Solution

Exercice 4 *(réf 92)*

À quelle distance du centre de la Terre une masse de 1,0 kg pèse-t-elle 1,0 N ?
Note : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$

Solution

Exercice 5 *(ref 93)*

Supposons que la Terre est comprimée jusqu'à réduire de moitié son diamètre. Que devient l'accélération de pesanteur à sa surface ?

Solution

Exercice 6 *(ref 94)*

Comparer l'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur la Lune à celle du Soleil sur la Lune. On donne :

$$M_S = 1{,}987\ 10^{30} kg\ ;\ M_T = 5{,}975\ 10^{24} kg\ ;\ M_L = 7{,}35\ 10^{22} kg;$$
$$r_{ST} = 1{,}495\ 10^{11}\ m\ ;\ r_{TL} = 3{,}844\ 10^{8}\ m$$

Solution

Exercice 7 *(ref 95)*

Sachant que la distance moyenne entre Uranus et Neptune est $4{,}9\ 10^9\ km$ et que $M_U = 14{,}6\ M_T$ tandis que $M_N = 17{,}3\ M_T$, calculer leur interaction gravitationnelle moyenne. Si nécessaire, $M_T = 5{,}975\ 10^{24} kg$.

Solution

Exercice 8 *(ref 96)*

Considérons deux sphères homogènes de rayon R et de densité ρ, au contact l'une de l'autre. Écrire l'expression de leur interaction gravitationnelle mutuelle en fonction de R, ρ et G. On fera l'approximation (en réalité inexacte) que cette interaction est équivalente à celle de deux masses ponctuelles égales à celles des sphères.

Solution

Exercice 9 *(ref 97)*

Si vous pouvez sauter 1,00 m en hauteur sur la Terre, quelle hauteur sauteriez-vous sur Vénus, où $g_V = 0{,}88\ g_T$ en supposant la même vitesse initiale ?

Solution

Exercice 10 (ref 98)

Une fusée règle la poussée de ses moteurs de façon à rester immobile par rapport à la planète, à une altitude de 4 R_T. À quelle fraction de votre poids terrestre est égal votre poids dans la fusée.

Solution

Exercice 11 (ref 99)

On considère deux particules subatomiques, un électron et un proton, dont les masses respectives sont $9{,}1 \times 10^{-31}\,kg$ et $1{,}7 \times 10^{-27}\,kg$. Lorsqu'elles sont distantes de $5{,}3 \times 10^{-11}\,m$, comme dans u atome d'hydrogène, elles s'attirent avec une force électrique (F_E) de $8{,}2 \times 10^{-8}\,N$. Comparez cette force avec l'interaction gravitationnelle correspondante (F_G). De combien F_E est-elle supérieure à F_G.

Solution

Exercice 12 (ref 100)

Montrez que, si $r = R_T$, alors $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ est équivalent à $g_T = \frac{GM_T}{r^2}$ où g_0 est l'accélération gravitationnelle absolue à la surface de la Terre et g_T est l'accélération gravitationnelle d'une particule extérieure à la surface de la Terre, en fonction de r.

Solution

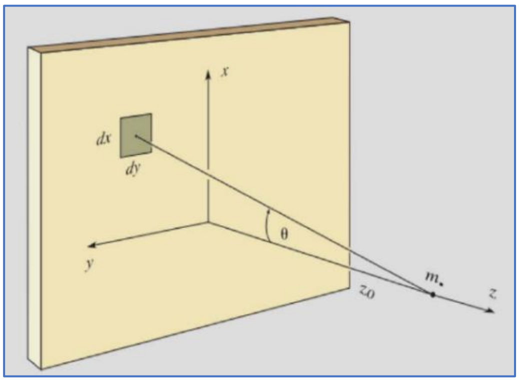
Exercice 13 (ref 101)

L'accélération de la pesanteur sur la surface de Mars est $3{,}7\,m/s^2$. Sachant que le diamètre de cette planète est $6{,}8 \times 10^6\,m$, déterminez la masse de la planète et comparez-la avec celle de la Terre.
Note : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}$ kg

Solution

Exercice 14 (réf 128)

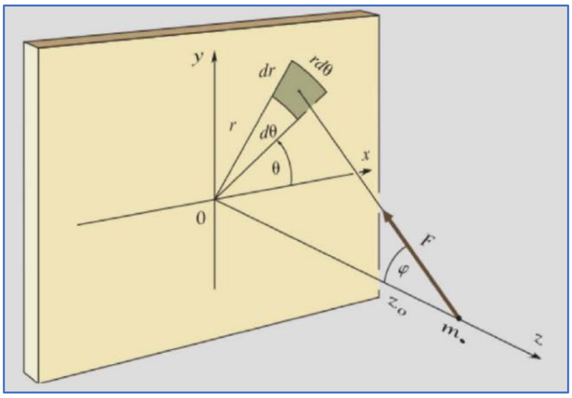
Une très grande plaque plate, d'épaisseur τ, de densité uniforme ρ occupe le plan xy. Une masse ponctuelle (m_0) est située à une distance z_0 sur l'axe des z. Écrire une expression de l'intégrale qui exprime la force gravitationnelle sur m_0 due à son interaction avec la plaque. Faites le calcul en coordonnées **cartésiennes** en supposant que $z_0 \gg \tau$. **Ne calculez pas l'intégrale.**



Solution

Exercice 15 (réf 129)

Une très grande plaque plate circulaire, d'épaisseur τ, de densité uniforme ρ occupe le plan xy. Une masse ponctuelle (m_0) est située à une distance z_0 sur l'axe des z. Écrire une expression de l'intégrale qui exprime la force gravitationnelle sur m_0 due à son interaction avec la plaque. Faites le calcul en coordonnées **polaires** en supposant que $z_0 \gg \tau$.
Que devient cette force F_z si $R \gg z_0$?



Solution

Exercice 16 (réf 111)

Imaginons un astronaute de masse 70 kg flottant dans l'espace à 10 m du centre de gravité du module Apollo dont la masse est $6{,}0 \times 10^3$ kg. Déterminer la force gravitationnelle qu'exerce le vaisseau spatial sur l'astronaute et l'accélération qui en résulte (à cet instant). Quelle est la force de l'astronaute sur le vaisseau et l'accélération de ce dernier ?

Solution

Exercice 17 (réf 112)

Vénus a un diamètre de $12{,}1 \times 10^3$km et une densité moyenne de $5{,}2 \times 10^3\ \frac{kg}{m^3}$. De quelle hauteur tomberait un corps en une seconde près de sa surface ?

Solution

Exercice 18 (réf 113)

Sachant que $\frac{M_L}{M_T} = 0{,}01230$ et $\frac{R_L}{R_T} = 0{,}2731,$ calculer le rapport du poids d'un astronaute sur la Lune (F_{pL}) à son poids (F_{pT}) sur Terre.

Solution

Exercice 19 (réf 114)

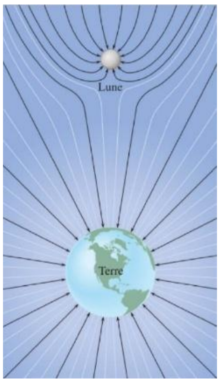
Soit $g_0$la valeur de $g_T(r)$ sur la surface de la Terre, montrer que :

$$g_T(r) = g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2 \ pour\ r \geq R_T$$

Solution

Exercice 20 (réf 115)

Déterminer la position d'un vaisseau spatial sur la droite joignant les centres de la Terre et de la Lune, où les forces exercées sur lui par ces deux corps célestes sont exactement opposées ; le vaisseau est alors sans poids (Voir la figure ci-contre)



On donne :

- $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$
- $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}\ kg$
- $r_{TL} = 3{,}844 \times 10^8 m$

Solution

Exercice 21 (réf 116)

Mars a une masse $M_M = 0{,}108\, M_T$ et un rayon moyen $R_M = 0{,}534\, R_T$. Déterminer l'accélération de la pesanteur à sa surface en fonction de $g_0 = 9{,}8\, m/s^2$.

Solution

Exercice 22 (réf 117)

Trois très petites sphères, de masses respectives $2{,}50\ kg$, $5{,}00\ kg$ et $6{,}00\ kg$, sont situées sur une ligne droite dans l'espace, loin de tout autre corps. La première est située entre les deux autres, à $10{,}0\ cm$ à droite de la seconde et à $20{,}0\ cm$ à gauche de la troisième. Calculer la force gravitationnelle subie par la première sphère.

Solution

Exercice 23 (réf 118)

On pense que, pendant l'effondrement gravitationnel d'une étoile, la densité et la pression deviennent tellement élevées que les atomes eux-mêmes seront écrasés, laissant seulement un noyau résiduel de neutrons. Une telle étoile à neutrons ressemble, en certains aspects, à un noyau atomique géant avec une énorme densité de l'ordre de $3 \times 10^{17}\ kg/m^3$. Calculer l'accélération de la pesanteur à la surface d'une étoile à neutrons de masse égale à la masse du Soleil.

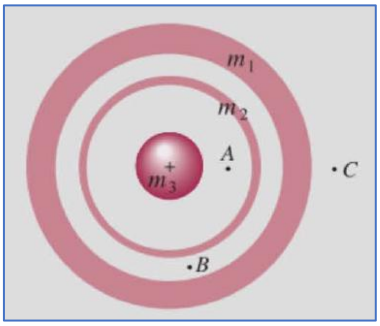
On donne :

- Masse du Soleil = $1{,}987 \times 10^{30}\ kg$.

Solution

Exercice 24 (réf 119)

La figure ci-contre montre deux couches sphériques concentriques, minces, homogènes et de masses m_1 et m_2 autour d'une petite boule de plomb de masse m_3. Écrire l'expression de la force gravitationnelle exercée par ce système sur une particule de masse m si elle est en A, B ou C situés aux distances r_A, r_B et r_C du centre.



Solution

Exercice 25 (réf 130) et
Exercice 26 (réf 130)

On veut tirer un projectile (de masse m) verticalement de la surface d'une planète de masse M et de rayon R.

a) Montrez que la vitesse minimum, avec laquelle le projectile doit être lancé pour atteindre un point situé à une distance r du centre de la planète, est donnée par :

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

[Suggestion : utilisez $a = vdv/dr$ et le fait que $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Prenez la verticale vers le haut comme sens positif].

b) Déterminer la vitesse minimum avec laquelle on doit lancer un projectile non propulsé, de la surface de la Terre, pour qu'il puisse échapper complètement au champ gravitationnel de la planète. C'est ce qu'on appelle la vitesse de libération. [Suggestion : il faut qu'à l'infini, la vitesse du projectile soit nulle].

Solution

Exercice 27 (réf 131)

Considérons une planète, de masse M et rayon R, et un petit objet, de masse m, tombant sur elle d'une distance r_0. Établir une expression de la vitesse de l'objet en fonction de sa distance r au centre de la planète, sachant que pour $r = r_0,\ v = 0$. Si la planète est la Terre, dont l'accélération de la pesanteur à la surface est g_0, donnée par $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$, montrer que la vitesse avec laquelle m frappe la surface est $v = \sqrt{2\, R_T g_0}$, si r_0 est très grand. [Suggestion : utiliser l'équation $vdt = dr$ pour obtenir vdv au premier membre et $\frac{dr}{r^2}$ au second membre].

Solution

Exercice 28 (réf 132)

Une tige mince, de longueur L et de masse m, est placée le long de l'axe des x positifs, de façon que son extrémité la plus proche de l'origine soit d'abscisse x_0. Trouver la force gravitationnelle qu'elle exerce sur une masse ponctuelle M, qui se trouve à l'origine. Est-ce que l'interaction serait la même si toute la masse de la tige était concentrée en son centre ? Que devient l'interaction si $x_0 \gg L$? [Suggestion : partager la tige en petits segments assimilables à des masses ponctuelles dm].

Solution

Exercice 29 (réf 133)

Déterminez le taux de variation de g_T avec la distance, près de la surface de la Terre. Calculez la valeur numérique de cette quantité en mètres par seconde au carré par mètre. Gardez trois chiffres significatifs.
On donne :

- Masse de la Terre $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$
- Rayon moyen de la Terre $R_T = 6{,}371\ 23 \times 10^6\ m$
- $G = 6{,}672\ 59 \times 10^{-11}\ N\frac{m^2}{kg^2}$

Solution

Exercice 30 (réf 134)

Un anneau métallique mince de centre O, de rayon R et de masse m, se trouve dans le plan yz. Une masse ponctuelle M_0 est située sur son axe Ox à l'abscisse x_0. Déterminer la force gravitationnelle exercée par l'anneau sur la masse M_0. Est-ce que l'anneau se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre ? Que devient l'interaction si $x_0 \gg R$? [Suggestion : commencer par trouver la force due à un petit secteur, c'est-à-dire un élément différentiel, dm, de l'anneau].

Solution

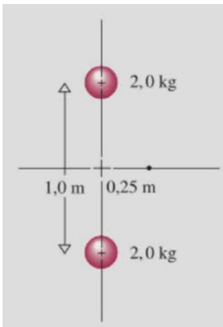
Exercice 31 (réf 135) + Exercice 57

a) Écrire l'expression de la force gravitationnelle exercée par un nuage sphérique uniforme de masse M et rayon R sur une petite masse m à l'intérieur du nuage. On suppose la particule à une distance $r < R$.

b) Quelle est l'intensité du champ gravitationnel à l'intérieur d'une sphère pleine et uniforme de masse M et de rayon R, à une distance $R/2$ du centre ?

Solution

Exercice 32 (réf 136)



Deux boules de cristal de $2{,}0\ kg$ sont distantes de $1{,}0\ m$. Déterminer le module et la direction de la force gravitationnelle qu'elles exercent sur une bille de $10\ g$ située à égale distance de ces boules et à $0{,}25\ m$ de la droite qui joint leurs centres.

Solution

Exercice 33 (réf 137)

Une étoile à neutrons peut être imaginée comme un noyau immense soudé par sa propre gravitation. Quelle est la période de rotation de cette étoile au-dessus de laquelle elle éjecte de la matière équatoriale ? Prendre $\rho = 10^{17}\, kg/m^3$. Il est largement admis que les pulsars, étranges émetteurs célestes de rayonnements pulsés, sont des étoiles à neutrons en rotation rapide.

Solution

Exercice 34 (réf 138)

Tracez le graphique représentant la variation du poids d'un objet de masse m en fonction de l'altitude h au-dessus de la surface de la Terre jusqu'à environ $700\, km$. Que pouvez-vous dire de cette courbe (tant que $R \gg h$) ?

Solution

Exercice 35 (réf 139)+ Exercice 36 + Exercice 37

Soit M la masse d'une planète sphérique, homogène et de rayon R. Montrer que l'accélération gravitationnelle absolue g_p varie avec la hauteur h au-dessus de la surface de la planète suivant l'expression :

$$g_p = \frac{GM}{R^2}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

Cette expression peut être approximée, en utilisant le développement du binôme:

$$(a + x)^n = a^n + n\, a^{n-1}x + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}\, x^2 + \cdots$$

où $x^2 < a^2$. Ici, $a = 1$, $x = \frac{h}{R}$, $n = -2$. Si $h \ll R$. En vous limitant aux deux premiers termes,

a) Montrez que :

$$g_p = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Notez que GM/R^2 est précisément la valeur de g_p sur la surface ($h = 0$)

b) Calculer l'accélération de la pesanteur à $10\,000\, m$ au-dessus de la surface de la Terre de deux façons :

(1) en utilisant $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ et

(2) en utilisant l'approximation trouvée en a). Comparer les deux résultats.

c) Déterminer l'accélération gravitationnelle subie par le Module Lunaire quand il était à 100 m au-dessus de la surface de la Lune. Est-elle sensiblement différente de sa valeur sur la surface de la Lune ?

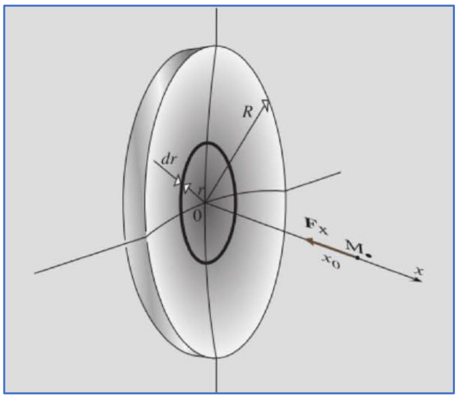
On donne :

- Masse de la Terre $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$
- Rayon moyen de la Terre $R_T = 6{,}371\ 23 \times 10^6\ m$
- $G = 6{,}672\ 59 \times 10^{-11}\ N\frac{m^2}{kg^2}$
- Masse de la Lune: $7{,}35 \times 10^{22}\ kg$
- Rayon moyen de la Lune $R_L = 1{,}74 \times 10^6\ m$

Solution

Exercice 38 (réf 140)

Attention : nécessite une bonne connaissance de trigonométrie et une bonne pratique du calcul intégral avec des fonctions trigonométriques ou … une table d'intégrales sous la main 😉 !



La figure ci-contre représente un disque concave mince de densité ρ, dont l'épaisseur τ augmente linéairement vers la périphérie à partir d'un trou minuscule au centre, de façon que $\tau = Kr$, où K est une constante.

a) Déterminez la force gravitationnelle agissant sur une masse ponctuelle (M) située à une distance x_0 sur l'axe. (a) Il vous suffit d'utiliser une intégrale familière et que vous pouvez trouver dans les tables d'intégrales. Vous trouverez :

$$F_x = 2\pi K\rho MG\, x_0 \left(\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + x_0^2}}{x_0} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \right)$$

[Suggestion : partagez le disque en anneaux concentriques, chacun ayant une masse dm. Écrivez la loi de gravitation universelle en termes de L (la distance de l'anneau à M), dm et θ pour chaque anneau puis intégrez sur le disque.]

b) Vérifiez les unités de l'équation trouvée.

Solution

Exercice 39 (réf 141)

Une longue tige mince, de masse M et de longueur L est placée le long de l'axe des y avec son centre à l'origine.
(a) Trouver la force gravitationnelle qu'elle exerce sur une masse ponctuelle (m_0) située sur l'axe des x, à une distance x_0.
(b) En supposant constante la masse par unité de longueur (masse linéique) λ_m de la tige, trouver la valeur de la force lorsque L tend vers l'infini.

Solution

Exercice 40 (réf 102)

Utilisant les données relatives à l'orbite terrestre, calculez la masse du Soleil.
On donne :
- $r_{TS} = distance\ Terre - Soleil = 1{,}495 \times 10^{11} m$
- $T = temps\ de\ révolution\ de\ la\ Terre\ autour\ du\ Soleil = 365{,}25\ jours$

Solution

Exercice 41 (réf 103)

Déterminer la valeur approximative de la vitesse d'un satellite de la Lune sur une orbite circulaire à une altitude de 62 km, sachant que le rayon de la Lune est 1738 km.
On donne la masse de la Lune : $m_L = 7{,}35 \times 10^{22} kg$

Solution

Exercice 42 (ref 104)

Chacun des modules lunaires Apollo était sur une orbite très basse autour de la Lune. Déterminer la période orbitale sachant que la masse du module était $14{,}7 \times 10^3 kg$ et que son altitude était de 60,0 km.
On donne la masse de la Lune : $m_L = 7{,}35 \times 10^{22} kg$
et le rayon de la Lune : $1{,}74 \times 10^6\ m$.

Solution

Exercice 43 (réf 105)

Montrer que la période (en secondes) d'un satellite de la Terre sur une orbite circulaire , et sa distance au centre de la planète (en mètres) sont liées par la relation :

$$T = 3{,}15 \times 10^{-7}\,(r_T)^{\frac{3}{2}}$$

On donne la masse de la Terre : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24} kg$

Solution

Exercice 44 (réf 106)

Spoutnik I, le premier satellite artificiel autour de la Terre (octobre 1957) avait un rayon orbital moyen de 6950 km.
Calculer sa période.
On donne la masse de la Terre : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24} kg$

Solution

Exercice 45 + Exercice 46 (réf 107)

Un satellite doit passer d'une orbite circulaire à une autre de rayon deux fois plus grand.
Comment sa période est-elle modifiée ?
Comparez les deux vitesses orbitales v_1 et v_2.

Solution

Exercice 47 (ref 108)

Quelle est l'accélération due à l'attraction gravitationnelle de la Lune, exercée sur un corps à la surface de la Terre ?
On donne :
Masse de la Lune : $m_L = 7{,}35 \times 10^{22} kg$
Distance Terre-Lune = $r_{TL} = 3{,}844 \times 10^{8} m$

Solution

Exercice 48 (ref 109)

Quelle est l'intensité du champ gravitationnel à 1,00 m d'une petite sphère de masse 1,00 kg ?

Solution

Exercice 49 (ref 110)

Quelle est l'intensité du champ gravitationnel produit par le Soleil sur la surface de la Terre ?
Masse du Soleil : $m_S = 1{,}987 \times 10^{30} kg$
Distance Terre-Soleil = $r_{TS} = 1{,}495 \times 10^{11} m$

Solution

Exercice 50 (réf 120)

Par définition, la Terre est à une distance de 1,000 UA du Soleil. Utilisant le fait que Jupiter est, en moyenne, à 5,2028 UA du Soleil, calculez sa période en années terrestres.

Solution

Exercice 51 (réf 121)

Déterminez la période en années terrestres d'un satellite placé sur une orbite solaire circulaire de rayon 597,9 millions de km.
On donne la distance Soleil-Terre = 1 Unité Astronomique (1UA)$= 1{,}495 \times 10^{11}\ m.$

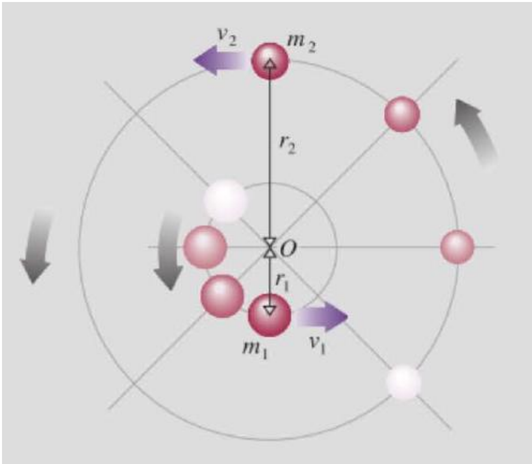
Solution

Exercice 52 (réf 122)

Considérons un corps céleste de masse M (une étoile, une planète ou la Lune), autour duquel un satellite est en orbite. Soit C la constante de Kepler correspondante. Montrez que C/M est une constante universelle, la même pour tous les corps célestes.

Solution

Exercice 53 + Exercice 54 (réf 123)



Considérons les deux masses comparables m_1 et m_2 de la figure ci-contre, en rotation sur des orbites autour de leur barycentre O, à des distances r_1 et r_2 respectivement et avec une période commune T. Comme leur interaction gravitationnelle mutuelle produit leurs forces centripètes individuelles F_{C1} et F_{C2}, celles-ci doivent être égales. Montrez que :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

et comparer cela avec la définition du centre de gravité.

Ecrivez des expressions explicites pour $F_G = F_{C1}$ et $F_G = F_{C2}$ et combinez les pour obtenir la troisème loi de Kepler dans la version plus exacte de Newton :

$$\frac{(r_1 + r_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\,\pi^2}$$

Solution

Exercice 55 (réf 124)

Dans le cas d'une orbite elliptique, la distance moyenne du corps central au corps en orbite est exactement la moitié du grand axe de l'ellipse. Ce demi grand axe est aussi la moyenne de l'aphélie et du périhélie. L'astéroïde minuscule Icarus (qui a une masse de $5{,}0 \times 10^{12}\ kg$ et un rayon de 0,7 km) a une trajectoire elliptique allongée autour du Soleil. Il coupe l'orbite terrestre, et il a un périhélie de 0,186 UA et un aphélie de 1,97 UA. Calculer sa distance moyenne au Soleil et sa période orbitale en années terrestres.

Solution

Exercice 56 (réf 125)

La galaxie « spirale » Andromède, connue sous le nom de code M31, est distante de $2{,}2 \times 10^6$ années-lumière de la Terre. Les mesures montrent qu'une étoile périphérique, à 5×10^9 UA du centre de cette galaxie, décrit une orbite autour du noyau à une vitesse de 200 km/s. Estimez la masse de M31.

Solution

Exercice 58 (réf 126)

Déterminez le champ gravitationnel au centre d'un anneau uniforme de masse M et rayon R.

Solution

Exercice 59 (réf 127)

Galilée découvrit les quatre lunes principales de la planète Jupiter en 1610. La plus proche, Io, a une période de 1,7699 j (jours terrestres) et elle est à une distance de 5,578 R_J (rayons de Jupiter) du centre de la planète. En déduire la densité moyenne de Jupiter.

Solution

Exercice 60 (réf 142)

Les étoiles binaires Sirius A et Sirius B décrivent des orbites, autour de leur barycentre, avec une période de 50 ans. Leur distance est de $20{,}0\ UA\ (ou\ 2{,}99\ \times\ 10^{12}\ m)$. L'étoile la moins brillante, Sirius B, est deux fois plus éloignée du barycentre que Sirius A. Calculer leurs masses

Solution

Exercice 61 (réf 143)

On voudrait placer un satellite artificiel de la Terre en orbite circulaire à mi-distance Terre-Lune. Calculer sa période et la vitesse orbitale nécessaire.

- On donne la distance Terre-Lune : $r_{TL} = 3{,}844 \times 10^8 m$

Solution

Exercice 62 (réf 144)

Deux corps, de même masse m, sont situés sur l'axe des y à une distance d au-dessus et au-dessous de l'origine. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel en tout point P de l'axe des x, situé à une distance x de l'origine, est donnée par :

$$g = \frac{2\,G\,m\,x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Noter que la distance du point P aux corps $est\; r = (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$.

Solution

SOLUTIONS DES EXERCICES DU Chapitre 7 de Hecht - Physique

La Gravité selon Newton

La gravité selon Newton - Solutions des exercices

Solution 1 (ref 89)

Rappelons que le poids d'un objet est la force de gravitation exercée par un objet massif (planète, étoile, etc) sur cet objet.
Donc (sur Terre, avec M_T la masse de la Terre), $F = \frac{GM_T\, m}{r}$.
Si la masse de l'objet est doublée : $m \longrightarrow 2m$
Si la distance au centre terrestre est doublée : $r \longrightarrow 2r$

Et le nouveau poids F'devient donc : $F' = \frac{GM_T(2m)}{(2\, r)^2} = \frac{2GM_T\, m}{4\, r^2} = \frac{1}{2}\frac{GM_T\, m}{r^2} = \frac{1}{2}F$
En conclusion, si sa masse de l'objet est doublée et sa distance au centre de la Terre est aussi doublée, le nouveau poids sera diminué de moitié.

Retour à l'énoncé

Solution 2 (ref 90)

La loi de base est : $F = \frac{GM_C m_b}{r^2}$ avec M_C, la masse du boulet de canon ; m_b, la masse de la bille, et r, la distance entre les deux objets.

D'où : $m_b = F\frac{r^2}{G\, M_C} = 1{,}48 \times 10^{-10} \times \frac{(0{,}3)^2}{(6{,}67\times10^{-11} \cdot 20)} = 0{,}010\, kg = 10\, g$

Retour à l'énoncé

Solution 3 (ref 91)

La loi de base est : $F = \frac{GM_s M_s}{r^2}$ avec M_s, la masse de l'une des sphères, et r, la distance entre les deux sphères.

On a alors :

$$F = \frac{GM_s M_s}{r^2} = \frac{G(M_s)^2}{r^2} \Rightarrow M_s^2 = \frac{F \cdot r^2}{G} = \frac{(1{,}00 \cdot (1{,}00)^2)}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = \frac{1}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$
$$= 14\,992\,503\,748\, kg^2$$
$$\Rightarrow M_s = \sqrt{14\,992\,503\,748\, kg^2} = 1{,}22\; 10^5\, kg$$

Retour à l'énoncé

Solution 4 (ref 92)

La loi de base est : $F = \frac{GM_T m}{r^2}$ avec M_T, la masse de la Terre, m, la masse de l'objet et r, la distance 'centre de la Terre – centre de l'objet'.

$$⇨ \; F = \frac{GM_T m}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{G\,M_T\,m}{F}} = \sqrt{\frac{6{,}67\;10^{-11} \cdot 5{,}975\;10^{24} \cdot 1}{1}} \approx 2{,}0 \times 10^7 m$$

Note, le rayon terrestre étant environ 6 360 000 m, cela veut dire que l'objet se trouve à environ : $20\,000\,000 - 6\,360\,000 = 13\,640\,000\;m \approx 13640\;km$ de la surface terrestre.

Retour à l'énoncé

Solution 5 (ref 93)

À la surface de la Terre, l'accélération g est donnée par : $g = \frac{GM_T}{r_T^2}$.
Si r_T devient $\frac{1}{2} r_T$, alors la nouvelle accélération g' devient : $g' = \frac{GM_T}{\left(\frac{1}{2} r_T\right)^2} = 4\,\frac{GM_T}{r_T^2} = 4g.$
L'accélération sera donc multipliée par 4

Retour à l'énoncé

Solution 6 (ref 94)

La force gravitationnelle Terre-Lune est donnée par : $F_{TL} = G\frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2}$.

La force gravitationnelle Soleil-Lune est donnée par : $F_{SL} = G\frac{M_S \cdot M_L}{r_{SL}^2}$.

Le rapport entre les deux forces est donc :

$$\frac{F_{TL}}{F_{SL}} = \frac{G\frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2}}{G\frac{M_S \cdot M_L}{r_{SL}^2}} = \frac{\frac{M_T}{r_{TL}^2}}{\frac{M_S}{r_{SL}^2}} = \frac{M_T}{r_{TL}^2} \cdot \frac{r_{SL}^2}{M_S} = \frac{5{,}975\;10^{24} \times (1{,}495\;10^{11})^2}{(3{,}844\;10^{8})^2 \cdot\; 1{,}987\;10^{30}} \approx 0{,}5$$

Notez que pour la distance Soleil-Lune, on a pris en fait la distance Soleil-Terre, ce qui est vrai en moyenne (vu que la Lune orbite autour de la Terre). De toute façon, si on souhaitait faire un calcul plus précis à un moment donné en fonction de la position de la Lune, la 'vraie' distance Soleil-Lune ne serait influencée au maximum qu'au 3ème chiffre après la décimale vu que l'on ajouterait ou soustrairait 10^8 à 10^{11}, ce qui ne change pas grand-chose…

Retour à l'énoncé

Solution 7 (ref 95)

La force gravitationnelle Uranus - Neptune est donnée par :

$$F_{UN} = G\frac{M_U \cdot M_N}{r_{UN}^2} = 6{,}67\ 10^{-11}\frac{(14{,}6 \times 5{,}975\ 10^{24}) \cdot (17{,}3 \times 5{,}975\ 10^{24})}{(4{,}9\ 10^{12} m)^2}$$
$$= \mathbf{2{,}5\ 10^{16} N}$$

Retour à l'énoncé

Solution 8 (ref 96)

La densité de la sphère est sa masse divisée par son volume ➔ $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V$
Or $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ➔ $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$
Les deux centres sont séparés d'une distance $r = 2R$.
Et donc, la force gravitationnelle entre les deux sphères vaut ;

$$F = G.\frac{MM}{r^2} = G\frac{\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2}{(2R)^2} = G\rho^2\frac{16}{9}\frac{\pi^2 R^6}{4\,R^2} = \boldsymbol{\frac{4}{9}G\,\rho^2\pi^2 R^4}$$

Retour à l'énoncé

Solution 9 (ref 97)

D'abord un peu de cinématique, si vous ne connaissez pas la formule par cœur…
En toute généralité, dans le MRUA, on a :

$$v = v_0 + at \qquad (1)$$

Et

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (2)$$

Ayant considéré que la position initiale est $x_0 = 0$
De (1), on tire : $t = \frac{v - v_0}{a}$
Que l'on injecte dans (2) : $x = \frac{v_0(v-v_0)}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2$

Il vient :

$$\boldsymbol{x} = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2\,a}\left(v^2 - 2vv_0 + v_0^2\right) = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$
$$= \boldsymbol{\frac{v^2 - v_0^2}{2a}}$$

Adaptons cette formule à notre problème où l'on considère l'axe $\vec{z}$ dirigé vers le haut.
On a alors $a = -g$ puisque g est dirigé vers le bas.

D'où $x = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g}$. Or, dans le cas d'un saut en hauteur, lorsque $x = h$, càd au sommet du saut, la vitesse est nulle. Il vient donc : $h = -\frac{v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Sur Vénus, on a donc : $h_V = \frac{v_0^2}{2\,g_V}$ et sur la Terre : $h_T = \frac{v_0^2}{2\,g_T}$.

Et donc :

$\frac{h_V}{h_T} = \frac{\frac{v_0^2}{2\,g_V}}{\frac{v_0^2}{2\,g_T}} = \frac{g_T}{g_V}$ puisque les vitesses initiales sont égales (énoncé).

D'où $h_V = \frac{g_T}{g_V} \cdot h_T \overset{g_V = 0{,}88\,g_T}{=} \frac{g_T}{0{,}88\,g_T}\,h_T = \frac{h_T}{0{,}88} = \frac{1}{0{,}88} \approx 1{,}11\,m$

Conclusion : **si on saute 1 m de haut sur la Terre, on sautera 1,11 m sur Vénus, à vitesse initiale égale.**

Retour à l'énoncé

Solution 10 (ref 98)

Par rapport au centre de la Terre, la fusée orbite à une distance $r = R_T + 4R_T = 5R_T$.
Dès lors, la force subie par une masse m vaut :

$$F = G\,\frac{m\,m_T}{(5\,R_T)^2} = \frac{1}{25}\,G\,\frac{m\,m_T}{R_T^2} = \frac{1}{25}\,F_g$$

Donc, le poids dans la fusée vaut $\frac{1}{25}$ du poids terrestre !

Retour à l'énoncé

Solution 11 (ref 99)

La force électrique étant donnée $(8{,}2 \times 10^{-8} N)$, il n'y a même pas besoin de la calculer.
Il faut donc simplement calculer le rapport $\frac{F_E}{F_G}$ où $F_G = G\,\frac{m_{e^-} \cdot m_p}{r^2}$.

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{8{,}2 \cdot 10^{-8}}{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 9{,}1 \times 10^{-31} \cdot 1{,}7 \times 10^{-27}}{(5{,}3 \times 10^{-11})^2}} = 2{,}2 \times 10^{39}$$

Retour à l'énoncé

Solution 12 (ref 100)

En effet, si $r \geq R_T$, la formule générale est $g_T = \frac{GM_T}{r^2}$.

Dans le cas où $r = R_T$, on a bien sûr $g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}$ ce qui correspond bien à la définition de l'accélération due à la gravitation au niveau du sol terrestre : $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$

Retour à l'énoncé

Solution 13 (ref 101)

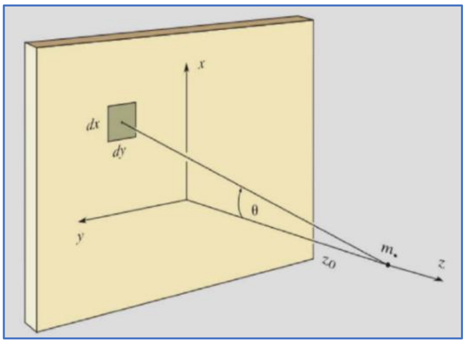
On part de la formule générale de l'accélération de la pesanteur à la surface d'un objet de masse M et de rayon r : $g = \frac{GM}{r^2}$. Pour Mars, notons : $g_M = \frac{GM_M}{r^2}$

On isole M : $M_M = \frac{g_M \cdot r^2}{G} = \frac{3{,}7 \cdot (3{,}4 \times 10^6)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = \mathbf{6{,}4 \times 10^{23}\ kg}$

Le rapport $\frac{M_M}{M_T} = \frac{6{,}4 \times 10^{23}}{5{,}975 \times 10^{24}} = 0{,}11$

Retour à l'énoncé

Solution 14 (réf 128)



Partons de la formule générale $\vec{F} = \frac{GMm_0}{r^2}\,\vec{r}$ où M est la masse de la plaque. Mais … la distance de m_0 à la plaque varie selon l'endroit considéré sur la plaque ! Il faut donc procéder par « petits morceaux » et ensuite intégrer !

Soit un point (x, y) sur la plaque et petit élément infinitésimal de surface $dx \cdot dy$ centré sur ce point de la plaque.

Vu que $\rho = \frac{M}{V}$, alors pour ce petit élément, on a $dm = \rho\, dV = \rho \cdot \tau \cdot dx \cdot dy$.

De plus, la distance de m_0 à (x, y) est : $\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$.

De sorte qu'au final, un petit élément de Force de gravitation dF vaut :

$$d\vec{F} = \frac{G\, dm \cdot m_0}{x^2 + y^2 + z_0^2}\vec{r} = \frac{G\, \rho \cdot \tau \cdot dx \cdot dy \cdot m_0}{x^2 + y^2 + z_0^2}\,\vec{r}$$

Or, vu la symétrie du problème, quel que soit l'endroit où se trouve l'élément dm, il y aura un autre élément dm symétrique par rapport au point $(0,0)$ (symétrie dite centrale) qui annulera les composantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de la force ! Ne reste donc en fait QUE les composantes selon $\boldsymbol{z}$! Or comme on le voit sur la figure, $dF_z = dF \cdot cos\theta$. Donc,

$$dF_z = dF \cdot cos\theta = dF \cdot \left(\frac{z_0}{r}\right) = \frac{G\,\rho \cdot \tau \cdot dx \cdot dy \cdot m_0}{x^2 + y^2 + z_0^2} \cdot \left(\frac{z_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}}\right)$$

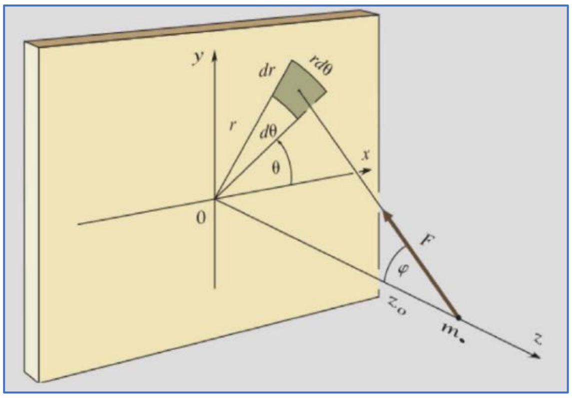
Et donc, il reste à intégrer sur toute la plaque :

$$F = F_z = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \iint \frac{dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Qu'on demande de ne pas calculer …

Retour à l'énoncé

Solution 15 (réf 129)



On fait référence à l'exercice référence 128 (ce corrigé) où on a obtenu

$$F = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \iint \frac{dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En coordonnées polaires, l'élément de surface n'est plus $dx \cdot dy$, mais $dr \cdot r\,d\theta$

La distance de m_0 à l'élément infinitésimal de la plaque n'est plus $\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$ mais simplement $r^2 + z_0^2$. !!Attention, le 'r' dans notre problème n'est plus la distance de m_0 à dm mais simplement la distance de $(0{,}0)$ à dm.

De plus, r varie de 0 à R et θ varie de 0 à 2π, afin de couvrir toute la plaque circulaire.

On a donc :

$$F = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \iint \frac{dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r \cdot dr \cdot d\theta}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \cdot 2\pi \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Effectuons le changement de variable :

$$u = r^2 + z_0^2 \;\Rightarrow du = d(r^2) = 2r \cdot dr \;\Rightarrow r \cdot dr = \frac{du}{2}$$

Dans ce cas, lorsque $r = 0 \;\Rightarrow u = z_0^2$ et lorsque $r = R \;\Rightarrow u = R^2 + z_0^2$

La nouvelle intégrale va donc aller de z_0^2 à $R^2 + z_0^2$.

D'où :

$$\int_0^R \frac{r\cdot dr}{(r^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{z_0^2}^{R^2+z_0^2} \frac{du}{2\,(u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot -2\,\left[u^{-\frac{1}{2}}\right]_{z_0^2}^{R^2+z_0^2} = -\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} - \frac{1}{z_0}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right]$$

Et donc, finalement,

$$F = G\,\rho\cdot\tau\cdot m_0\cdot z_0\cdot 2\pi\int_0^R \frac{r\cdot dr}{(r^2+z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{G\,\rho\cdot\tau\cdot m_0\cdot z_0\cdot 2\pi\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right)}$$

Dans le cas où $R \gg z_0$, alors $\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} \approx \frac{1}{R}$ et $\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right) \approx \frac{1}{z_0}$

De sorte que si $\boldsymbol{R \gg z_0}$,

$$F \approx G\,\rho\cdot\tau\cdot m_0\cdot z_0\cdot 2\pi\left(\frac{1}{z_0}\right) = \boldsymbol{G\,\rho\cdot\tau\cdot m_0\cdot 2\pi}$$

Retour à l'énoncé

Solution 16 (ref 111)

Note préliminaire : La raison pour laquelle on parle de centre de gravité est parce que qu'on considère que le poids du module est concentré sur ce centre de gravité et que donc, l'astronaute est éloigné de 10 mètres par rapport à la masse de ce module…

Il s'agit donc d'appliquer simplement $F = G\frac{M_m M_a}{r^2}$

On a donc : $F = G\frac{M_m M_a}{r^2} = 6{,}67\times 10^{-11}\,\frac{6000\cdot 70}{(10)^2} = 2{,}8\times 10^{-7}\,N$

L'accélération de l'astronaute est simplement donnée par $F = m\cdot a$, avec ici :

$$a_a = \frac{F_a}{m_a} = \frac{2{,}8\times 10^{-7}}{70} \approx 4{,}0\times 10^{-9}\,m/s^2$$

La force de l'astronaute sur le vaisseau est bien sûr la même que celle du vaisseau sur l'astronaute par principe d'action / réaction (3ème loi de Newton) confirmée par le fait que $F = G\frac{M_m M_a}{r^2}$ est une équation parfaitement symétrique pour les masses $M_a$et M_m.

Par contre, l'accélération du vaisseau dépend bien de sa masse et faut alors :

$$a_{Apollo} = \frac{F_{Apoll}}{m_{Apollo}} = \frac{2{,}8\times 10^{-7}}{6000} \approx 4{,}7\times 10^{-11}\,m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 17 (ref 112)

Calculons d'abord la masse de Vénus, sachant que $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V$ et que le volume d'une sphère est donné par $V = \frac{4}{3}\pi \boldsymbol{R}^3$.

Ici : $\rho_V = 5{,}2 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ et $V_V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\mathbf{12{,}1 \times 10^6}}{\mathbf{2}} m\right)^3$

Et donc $M_V = \rho_V V_V = 5{,}2 \times 10^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\mathbf{12{,}1 \times 10^6}}{\mathbf{2}}\right)^3 \approx 4{,}82 \times 10^{24}\, kg$

Près de sa surface, l'accélération due à la gravitation est donnée par :

$$g_V = \frac{GM_V}{R_V^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{4{,}82 \times 10^{24}}{\left(\frac{12{,}1 \times 10^6}{2}\right)^2} \approx 8{,}79\, m/s^2$$

Et finalement ; on utilise $x = \frac{gt^2}{2}$ pour calculer la distance parcourue par la chute d'un objet en 1 seconde : $x = \frac{gt^2}{2} = 8{,}79 \cdot \frac{(1)^2}{2} \approx 4{,}4\, m$

Retour à l'énoncé

Solution 18 (ref 113)

Sur la Lune, son poids serait : $F_L = \frac{GM_L M_A}{(R_L)^2}$

Sur la Terre, son poids est : $F_T = \frac{GM_T M_A}{(R_T)^2}$

Le rapport des poids est donc :

$$\frac{F_L}{F_T} = \frac{\frac{GM_L M_A}{(R_L)^2}}{\frac{GM_T M_A}{(R_T)^2}} = \frac{M_L}{(R_L)^2} \cdot \frac{(R_T)^2}{M_T} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = 0{,}01230 \cdot \left(\frac{1}{0{,}2731}\right)^2 \approx 0{,}1649$$

Retour à l'énoncé

Solution 19 (ref 114)

Par définition, g_0 est l'accélération au niveau de la surface terrestre, soit :

$$g_0 = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$$

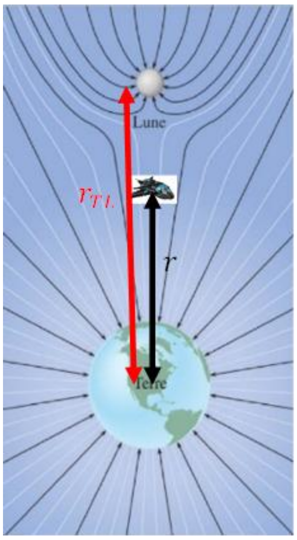
Tandis que l'accélération à une distance quelconque $r \geq R_T$ vaut :

$$g_T(r) = \frac{GM_T}{(r)^2}$$

Dès lors, $\frac{g_{T(r)}}{g_0} = \frac{\left(\frac{GM_T}{(r)^2}\right)}{\frac{GM_T}{(R_T)^2}} = \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$ et donc : $g_{T(r)} = g_0\left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

Retour à l'énoncé

Solution 20 (ref 115)



Posons :

- r_{TL} = distance Terre-Lune
- r = distance Terre vaisseau

Il en découle : distance Lune-vaisseau = $r_{TL} - r$

La force Lune-vaisseau vaut :

$$F_{LV} = \frac{G(M_L M_V)}{(r_{TL} - r)^2}$$

La force Terre-vaisseau vaut :

$$F_{TV} = \frac{G(M_T M_V)}{r^2}$$

La position d'équilibre où les forces s'opposent et où donc, le vaisseau est sans poids est lorsque $F_{LV} = F_{TV}$, càd :

$$\frac{G(M_L M_V)}{(r_{TL} - r)^2} = \frac{G(M_T M_V)}{r^2} \Leftrightarrow \frac{M_L}{(r_{TL} - r)^2} = \frac{M_T}{r^2} \Leftrightarrow \frac{r}{r_{TL} - r} = \frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_L}}$$

$$\Leftrightarrow r\sqrt{M_L} = r_{TL}\sqrt{M_T} - r\sqrt{M_T} \Leftrightarrow r = \frac{r_{TL}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_L} + \sqrt{M_T}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3{,}844 \times 10^8 \sqrt{5{,}975 \times 10^{24}}}{\sqrt{7{,}35 \times 10^{22}} + \sqrt{5{,}975 \times 10^{24}}} \approx 3{,}46 \times 10^8\ m$$

Retour à l'énoncé

Solution 21 (ref 116)

L'accélération gravitationnelle à la surface de Mars vaut :

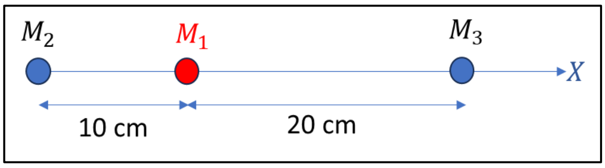
$$F_M = G\frac{M_M}{R_M^2}$$

Or, $M_M = 0{,}108\ M_T$ et $R_M = 0{,}534\ R_T$
D'où :

$$F_M = G\frac{M_M}{R_M^2} = G\frac{0{,}108\ M_T}{(0{,}534\ R_T)^2} = G\frac{0{,}108\ M_T}{(0{,}534)^2 \cdot R_T^2} = \frac{0{,}108}{(0{,}534)^2} \cdot g_0 \approx 0{,}379\ g_0$$

Retour à l'énoncé

Solution 22 (ref 117)



M_1 va subir l'attraction des 2 autres masses. On prend par convention que l'axe X est dirigé vers la droite.
Les forces étant vectorielles, l'attraction subie par M_1 est évidemment la somme des 2 attractions vectorielles individuelles.

- La force d'attraction subie par M_1 due à M_2 est : $F = -\ G\frac{(M_1 M_2)}{r_{12}^2}$.

Le signe 'moins' vient du fait que M_1va être attirée vers la gauche.

- La force d'attraction subie par M_1 due à M_3 est : $F = \ G\frac{(M_1 M_3)}{r_{13}^2}$.

La force totale subie par M_1 est donc :

$$F_{totale\ M_1} = GM_1\left(\frac{M_3}{r_{13}^2} - \frac{M_2}{r_{12}^2}\right) = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 2{,}5 \cdot \left(\frac{6}{0{,}2^2} - \frac{5}{0{,}1^2}\right) \approx -5{,}84 \times 10^{-8}\ N.$$

Notez que c'est cohérent ! En effet, M_2 et M_3 sont très similaires mais, M_1 est deux fois plus proches de M_2. M_1 ressent donc bien plus l'effet de M_1 que de M_2 et est donc bien attirée vers la gauche !

Retour à l'énoncé

Solution 23 (ref 118)

On cherche l'accélération à la surface de l'étoile à neutron.
On nous informe que sa densité vaut $\rho = \ 3 \times 10^{17}\ kg/m^3$ et que sa masse vaut 1 masse du soleil.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3} \quad \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3\ M}{4\ \pi\ \rho}} = \sqrt[3]{\frac{3\ (1{,}987 \times 10^{30})}{4\ \pi\ (3 \times 10^{17})}} \approx 1{,}165 \times 10^4\ m$$

L'accélération de la pesanteur à la surface d'une étoile à neutrons de masse égale à la masse du Soleil valant : $g_n = \frac{GM_n}{r_n^2}$, on a :

$$g_n = \frac{GM_n}{r_n^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1{,}987 \times 10^{30}}{(1{,}164 \times 10^4)^2} = 9{,}764 \times 10^{11}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 24 (ref 119)

Le grand principe de base (expliqué et démontré dans la partie théorie) est qu'à l'**intérieur** d'une coquille sphérique, le champ gravitationnel est NUL. C'est le théorème dit « des coquilles sphériques » ou « théorème de Gauss ».
Dès lors :

- En r_A, seule la force gravitationnelle due à M_3 est ressentie et donc :
$$F_A = \frac{GM_3}{r_A^2}$$
Aucune force n'est ressentie due à M_1 et M_2
- En r_B, seule la force gravitationnelle due à M_2 et M_3 est ressentie et donc :
$$F_B = \frac{G(M_2 + M_3)}{r_B^2}$$

Pourquoi r_B ? Car les masses sont supposées être concentrées au centre comme pour tous les exercices de ce niveau (sinon, le vrai calcul est trop compliqué – voir le niveau suivant – gravité ceinture noire)
Aucune force n'est ressentie due à M_1

- En r_C, la force gravitationnelle due à M_1, M_2 et M_3 est ressentie et donc :
$$F_B = \frac{G(M_1 + M_2 + M_3)}{r_C^2}$$

Retour à l'énoncé

Solution 25 et 26 (réf 130)

a) On a d'une part : $F = -\frac{GMm}{r^2}$ et d'autre part : $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = mv\frac{dv}{dr}$
Ces deux forces étant égales on a : $-\frac{GMm}{r^2} = mv\frac{dv}{dr} \Leftrightarrow -\frac{GM}{r^2} = v\frac{dv}{dr}$

Qu'on peut réécrire : $-\frac{GM}{r^2}dr = v\,dv$
Soit v la vitesse initiale lorsque $r = R$ et v_f, la vitesse finale à une distance r quelconque.
On a alors, en intégrant :
$$\int_v^{v_f} v\,dv = \int_R^r -\frac{GM}{r^2}dr \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(v_f^2 - v^2\right) = -GM\left[-\frac{1}{r}\right]_R^r = GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$
Si la vitesse de lancement est le minimum pour atteindre r, cela veut dire qu'une fois r atteint, la vitesse en ce point v_f, est nulle ; Donc,

$$-\frac{1}{2}v^2 = GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{2\,GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}}$$

b) En d'autres termes, on demande quelle est cette vitesse minimum pour que l'objet puisse aller à l'infini, càd, $r = \infty$. Si $r = \infty$ alors, $\frac{1}{r} = 0$ et

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2\,GM}}{\boldsymbol{R}}}$$

qu'on appelle la vitesse de libération

Retour à l'énoncé

Solution 27 (réf 131)

a) On a d'une part : $F = -\frac{GMm}{r^2}$ et d'autre part : $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = mv\frac{dv}{dr}$

Ces deux forces étant égales on a : $-\frac{GMm}{r^2} = mv\frac{dv}{dr} \;\Leftrightarrow\; -\frac{GM}{r^2} = v\frac{dv}{dr}$

Qu'on peut réécrire : $-\frac{GM}{r^2}dr = v\,dv$

Soit $v_0 = 0$ la vitesse initiale lorsque $r = r_0$ et v, la vitesse à une distance r quelconque. On a alors, en intégrant :

$$\int_0^v v\,dv = \int_{r_0}^{r} -\frac{GM}{r^2}dr \Leftrightarrow \frac{1}{2}\,v^2 = -GM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r} = GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{v(r)} = \sqrt{\boldsymbol{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}}$$

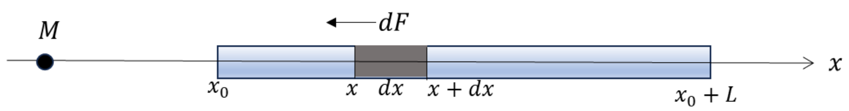
b) Si r_0 est très grand, alors $\frac{1}{r_0}$ tend vers 0 et donc $v(R_T) = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$

Mais on sait que $g_0 = \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0R_T^2$ et alors :

$$\boldsymbol{v(R_T)} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{R_T}} = \boldsymbol{\sqrt{2g_0R_T}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 28 (ref 132)



Il s'agit d'une simple application de $F = -\frac{GMm}{r^2}$ adapté à une tige.
L'idée est de calculer $\boldsymbol{dF}$ pour un élément de tige $\boldsymbol{dx}$ et ensuite d'intégrer sur toute la longueur de la tige. Ici,

$$dF = G\frac{M\,dm}{x^2}$$

Or, la densité linéaire de la tige vaut $\rho = \frac{m}{L}$, donc, $\rho = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \rho\,dx = \frac{m}{L}dx$. Il suit :

$$dF = G\frac{M\,dm}{x^2} = G\frac{M\,m\,dx}{L\,x^2}$$

Qu'on intègre sur la longueur, soit de x_0 à $x_0 + L$:

$$\boldsymbol{F} = \int dF = \int_{x_0}^{x_0+L} G\frac{M\,m\,dx}{L\,x^2} = \frac{GMm}{L}\int_{x_0}^{x_0+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{GMm}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_0+L} = \frac{GMm}{L}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+L}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{GMm}{x_0\,(x_0+L)}}$$

- **Si toute la masse était concentrée au milieu de la tige**, on aurait eu simplement :

$$\boldsymbol{F = \frac{GMm}{\left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}}$$

- Si $x_0 \gg L$, on a dans les deux cas

$$\boldsymbol{F = \frac{GMm}{{x_0}^2}}$$

Sans surprise, puisqu'à grande distance, la barre aurait été perçue comme un objet ponctuel de masse $\boldsymbol{m}$ située à une distance $\boldsymbol{x_0}$.

Retour à l'énoncé

Solution 29 (réf 133)

On cherche comment varie g lorsqu'on s'éloigne (mais pas trop !) de la surface terrestre. On sait que $g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donne g au niveau de la surface de la Terre et $g_T(r) = \frac{GM_T}{r^2}$ donne g à une altitude $r = R_T + h$ où h est la hauteur au-dessus de la surface terrestre.

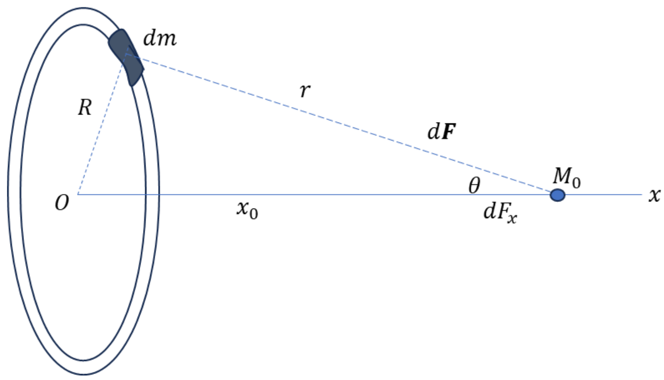
$$g_T(r) = \frac{GM_T}{r^2} \Rightarrow \frac{d}{dr}g_T(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{GM_T}{r^2}\right) = -2\frac{GM_T}{r^3}$$

Au niveau de la surface terrestre, $r = R_T$ et donc

$$\frac{d}{dr}g_T(r) = -2\frac{GM_T}{R_T^3} = -\frac{6{,}672\,59\times 10^{-11}\cdot\ 5{,}975\times 10^{24}}{(6{,}371\,23\times 10^{6}\ )^3} = -3{,}08\times 10^{-6}\ \left(\frac{m}{s^2}\right)/m$$

Retour à l'énoncé

Solution 30 (réf 134)



Note : Cet exercice est très similaire à la référence 129.
On calcule d'abord la force exercée par un élément de masse dm :

$$dF = G\frac{Mdm}{r^2} = G\frac{M\,dm}{R^2+x_0^2}$$

Par symétrie centrale par rapport à O, on voit que tout élément dm aura un élément symétrique tel que les composantes de F selon y et z s'annulent. Il restera donc les composantes selon x.

$$dF_x = dF\cos(\theta) = dF\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{M\,dm}{R^2+x_0^2}\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{M\,dm}{R^2+x_0^2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{R^2+x_0^2}}\right)$$
$$= G\frac{M\,dm\,x_0}{(R^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = \int dF_x = \int G\frac{M\,dm\,x_0}{(R^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\frac{M\,x_0}{(R^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}\int dm = \boldsymbol{G\frac{M\,m\,x_0}{(R^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Si toute la masse de l'anneau était concentrée au centre, ce serait tout simplement

$$\boldsymbol{F} = G\frac{M\,m\,x_0}{(x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\frac{M\,m\,x_0}{x_0^3} = G\frac{M\,m}{x_0^2}$$

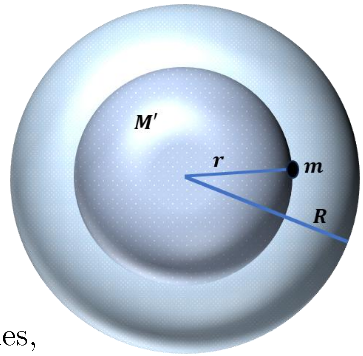
Et si $x_0 \gg R$, on aurait

$$F = G\frac{M\,m\,x_0}{(R^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{x_0\gg R}{\approx} G\frac{M\,m\,x_0}{(x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\frac{M\,m\,x_0}{x_0^3} = G\frac{M\,m}{x_0^2}$$

Prévisible puisqu'à grande distance, l'anneau apparait comme un objet ponctuel, donc, dont la masse apparait concentrée au centre. Dans le calcul de départ, cela reviendrait à considérer directement que $r \approx x_0$ et que $R \approx\ 0$ …

Retour à l'énoncé

Solution 31 (réf 135)



a) La première chose à savoir (démontré dans ma partie théorique) est **qu'à l'intérieur d'une coquille sphérique, le champ gravitationnel ressenti par la masse $\boldsymbol{m}$ est nul**. Alors, certes, la plus grande sphère de masse M n'est pas vide et n'est pas une coquille mais … peut être considéré comme un empilement infini de coquilles, chacune très mince et donc, le résultat est le même : la masse m ne va ressentir aucun champ gravitationnel dû à ce qui se trouve à un rayon plus grand que R !

Et donc, $F_m = \frac{GM'm}{r^2}$

Or, $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \frac{M}{R^3} = \frac{M'}{r^3} \Rightarrow M' = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$, d'où :

$$\boldsymbol{F_m} = \frac{GM'm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2} M\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{Gm\,M\,r^3}{r^2\,R^3} = \boldsymbol{\frac{Gm\,M\,r}{R^3}}$$

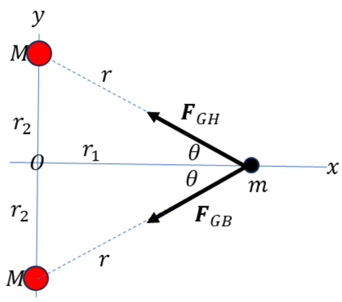
b) Par simple application du résultat obtenu en a), on a :

$$F\left(r = \frac{R}{2}\right) = \frac{Gm\,M\,\left(\frac{R}{2}\right)}{R^3} = \frac{GMm}{2R^2}$$

Accessoirement, $g\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{F\left(\frac{R}{2}\right)}{m} = \frac{GM}{2\,r^2}$

Retour à l'énoncé

Solution 32 (réf 136)



Soit F_{GH}, la force gravitationnelle exercée par la boule du haut et F_{GB}, la force gravitationnelle exercée par la boule du bas.

Par symétrie, on voit bien que seules les composantes selon X vont entrer en compte puisque selon Y, $(\boldsymbol{F_{GH}})_y$ et $(\boldsymbol{F_{GH}})_y$ seront opposées et vont s'annuler.

Or $(\boldsymbol{F}_{GH})_x = F_{GH}\, cos\theta = -\frac{GMm}{r^2}\cos\theta = -\frac{GMm}{r_1^2+r_2^2}\cos\theta = -\frac{GMm}{r_1^2+r_2^2}\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ et évidemment, même chose pour la boule du bas : $(\boldsymbol{F}_{GB})_x = -\frac{GMm}{r_1^2+r_2^2}\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$

La contribution de la force gravitationnelle exercée par les deux boules sur la masse m est donc la somme des deux :

$$F_g = -2\,\frac{GMm\,r_1}{(r_1^2+r_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Note : le signe 'moins' indique simplement que la force est vers la gauche…

$$\Rightarrow F_g = -2\,\frac{GMm\,r_1}{(r_1^2+r_2^2)^{\frac{3}{2}}} = -2\cdot\frac{6{,}67\times10^{-11}\ \cdot 2\cdot 10\times10^{-3}\cdot 0{,}25}{\sqrt{(0{,}25^2+0{,}50^2)^3}} = \ -3{,}8\times10^{-12}\ N$$

Retour à l'énoncé

Solution 33 (réf 137)

L'idée est de calculer l'accélération gravitationnelle à la surface puis de calculer la force centrifuge à cette même surface. La période obtenue en égalant les deux forces est la période limite telle qu'au-dessus, la matière serait éjectée.

L'accélération gravitationnelle à la surface est donnée par la formule habituelle :

$$g_n = \frac{GM_n}{R^2}$$

Or, $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho\, V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$.

D'où, $g_n = \frac{GM_n}{R^2} = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\,\rho\, R$

D'autre part, la force centrifuge qui tend à éjecter une particule à la surface de l'étoile est : $F_c = ma = m\frac{v^2}{R}$. L'accélération centrifuge est $\frac{v^2}{R}$.

Et donc, égaler les deux permet de trouver quand une particule est en équilibre entre la force qui l'attire vers le centre et la force qui tend à l'éjecter.

$$\Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{4}{3}\pi G\,\rho\, R$$

Or, pour une rotation, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi R}{\tau}$. D'où :

$$\frac{v^2}{R} = \frac{4}{3}\pi G\,\rho\, R \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2\pi R}{\tau}\right)^2}{R} = \frac{4}{3}\pi G\,\rho\, R \Leftrightarrow \frac{4\,\pi^2 R^2}{R\,\tau^2} = \frac{4}{3}\pi G\,\rho\, R \Leftrightarrow \frac{\pi}{\tau^2} = \frac{G\,\rho}{3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{G\rho}}}$$

Ce qui donne numériquement, $\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{6{,}67\times10^{-11}\cdot10^{17}}} = 1 \times 10^{-3}\ s = 1ms$

Autrement dit, dès qu'une étoile à neutrons de densité $10^{17}\ kg/m^3$ tourne plus rapidement que 1000 fois par seconde, elle peut commencer à éjecter de la matière.

Retour à l'énoncé

Solution 34 (réf 138)

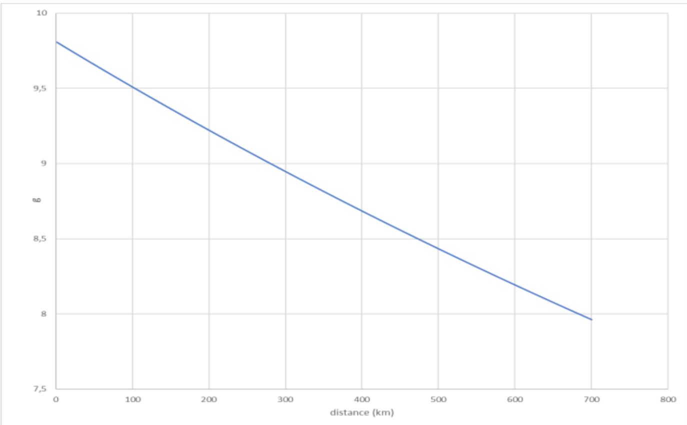
On sait que pour une masse m, le poids est donné par $F_g = mg_T$. Or, $g_T(h) = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ et $g_0 = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$ d'où :

$$F_g = mg_T = \frac{GM_T m}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T m}{\left(R_T(1+\frac{h}{R_T})\right)^2} = \frac{GM_T m}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{g_0 m}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Et donc,

$$\frac{F_g}{m} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{9{,}81}{\left(1+\frac{h}{(6370000)}\right)^2}\ m/s^2$$

Ce qui donne, avec un tableur Excel.



Dans le cas où $h \ll R_T$, h/R_T tend vers 0 et on peut appliquer un développement de Taylor à

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Pour faciliter l'écriture, on pose temporairement $\frac{h}{R_T} = x$. On veut donc développer $\frac{1}{(1+x)^2}$ en série de Taylor.

Rappel : au **premier ordre** (!) le développement de Taylor de $f(x)$ en 0 vaut :

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'0)\,x}\ (+\frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots)$$

Or,

- $f(x) = (1+x)^{-2} \Rightarrow f(0) = 1$
- $f'(x) = -2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'(0) = -2$

Donc, $f(x) \approx 1 - 2x$

Revenant à $\frac{h}{R_T} = x$, on a : $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2\frac{h}{R_T}$

Et donc, $\frac{F_g}{m} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \overset{h \ll R_T}{\approx} \boldsymbol{g_0\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right)}$

Retour à l'énoncé

Solution 35 +36 +37 (réf 139)

a) On sait que $g_T(h) = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ et $g_0 = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$ d'où :

$$g_T = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T}{\left(R_T(1+\frac{h}{R_T})\right)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}$$

Utilisons le développement du binôme :

$$(a+x)^n = a^n + n\,a^{n-1}x + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}\,x^2 + \cdots$$

où $x^2 < a^2$. Ici, $a = 1$, $x = \frac{h}{R}$, $n = -2$.

$$g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\left[1 - \frac{2(1)h}{R} + \frac{1}{2}(-2)(-3)(1)\left(\frac{h}{R_T}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$\approx \frac{GM_T}{R_T^2}\left[1 - \frac{2h}{R} + \cdots\right]$$

Si $h = 0$, on obtient bien : $g_T = \frac{GM_T}{R_T^2} = g_0$

b)

1) En utilisant $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$, on a $g_T = \frac{GM_T}{(R_t+h)^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}975\times10^{24}}{(6{,}37123\times10^6+10000)^2} = 9{,}791\ m/s^2$

2) En utilisant l'approximation trouvée en a), on obtient :

$$g_T \approx \frac{GM_T}{R_T^2}\left[1 - \frac{2h}{R} + \cdots\right] = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}975\times10^{24}}{(6{,}37123\times10^6)^2}\left[1 - \frac{20000}{6{,}37123\times10^6} + \cdots\right]$$
$$= 9{,}513\ m/s^2$$

Ce qui fait une différence d'un peu moins de 3%

c) Utilisant le résultat obtenu en a), on a :

$$g_l \approx \frac{GM_l}{R_l^2}\left[1-\frac{2h}{R_l}+\cdots\right] = \frac{6{,}67\times 10^{-11}\cdot\ 7{,}35\times 10^{22}}{(1{,}74\times 10^{6})^2}\left[1-\frac{2\cdot 100}{1{,}74\times 10^{6}}\right]$$
$$= 1{,}61906\ m/s^2$$

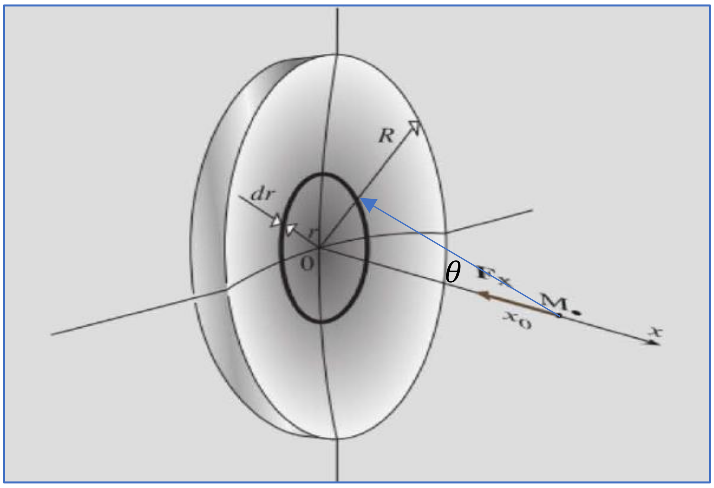
La valeur à la surface de la Lune est :

$$g_l = \frac{GM_l}{R_l^2} = \frac{6{,}67\times 10^{-11}\cdot 7{,}35\times 10^{22}}{(1{,}74\times 10^{6})^2} = 1{,}61925\ m/s^2$$

L'écart est donc de $\frac{1{,}61925-1{,}61906}{1{,}61925} \approx 0{,}01\%$ lequel est négligeable en pratique !

Retour à l'énoncé

Solution 38 (réf 140)



Considérons un anneau situé entre le rayon r et $r + dr$.
Sa largeur est dr. Son épaisseur est Kr et sa circonférence est $2\pi r$.
De sorte que son élément de volume est :

$$dV = 2\pi r \cdot Kr \cdot dr = 2\,\pi K\,r^2\,dr$$

Soit $\rho = M/V$, alors la masse dm de l'élément d'anneau est :

$$dm = \rho\,dV = \rho\,2\,\pi K\,r^2\,dr$$

Pour des raisons de symétries, seules les composantes de $\vec{\boldsymbol{F}}$ selon l'axe X vont entrer en ligne de compte. Et donc,

$$dF_x = dF\cos\theta = dF\frac{x_0}{(x_0^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{GM\,dm}{x_0^2+r^2}\frac{x_0}{(x_0^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{GM\,x_0\,(\rho\,2\,\pi K\,r^2\,dr)}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow F = \int dF_x = \int_0^R \frac{GM\,x_0\,\rho\,2\,\pi K\,r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\,GM\,x_0\,\rho\,\pi K\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Concentrons-nous sur la résolution de $\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

Soit vous disposez d'une table d'intégrales ou d'un logiciel de calcul analytique, soit on y va « à l'ancienne » 😉

Sur la figure on voit que : $\frac{r}{x_0} = tan(\theta)$ $\Rightarrow$ effectuons le changement de variable :

$$r = x_0\,tan(\theta)\ \Rightarrow dr = x_0\frac{(sin\theta cos\theta + sin\theta sin\theta)}{cos^2\,\theta}\,d\theta = x_0\frac{1}{cos^2\,\theta}\,d\theta = x_0\,sec^2\,d\theta$$

L'intégrale se réécrit alors :

$$\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{x_0^2\,tan^2(\theta)\,x_0\,sec^2\,d\theta}{(x_0^2+x_0^2\,tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

Or,

$$x_0^2 + x_0^2\,tan^2\,\theta = x_0^2\left(1+\frac{sin^2\,\theta}{cos^2\,\theta}\right) = x_0^2\left(\frac{1}{cos^2\,\theta}\right) = x_0^2\,sec^2\,\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^R \frac{x_0^2\,tan^2(\theta)\,x_0\,sec^2\,d\theta}{(x_0^2+x_0^2\,tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{x_0^2\,tan^2(\theta)\,x_0\,sec^2\theta\,d\theta}{(x_0^2\,sec^2\,\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^R \frac{x_0^3\,tan^2(\theta)\ \ sec^2\theta\,d\theta}{x_0^3\,sec^3\,\theta} = \int_0^R \frac{tan^2(\theta)\,d\theta}{sec\,\theta} = \int_0^R \frac{sin^2(\theta)\cos\theta\,d\theta}{cos^2\,\theta}$$

$$= \int_0^R \frac{sin^2(\theta)d\theta}{cos\,\theta} = \int_0^R \frac{1-cos^2(\theta)d\theta}{cos\,\theta} = \int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta - \int_0^R cos\,\theta\,d\theta$$

Or,

$$\int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta = \int_0^R \sec\theta\,d\theta = \int_0^R \sec\theta\,\frac{(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)}\,d\theta$$

Mais ... $\frac{d}{d\theta}(\sec\theta+\tan\theta) = \sec\theta\,tan\theta + \sec^2\theta = \sec\theta\,(\tan\theta+\sec\theta)$

Ce qui est exactement le numérateur !

On se retrouve donc avec une intégrale de type $\int\frac{du}{u} = \ln|u|$ avec $u = \sec\theta + \tan\theta$

Et donc, ici, on a :

$$\int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta\,|$$

Et donc,

$$\int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta - \int_0^R cos\,\theta\,d\theta = [\ln|\sec\theta+\tan\theta\,|]_0^R - [\sin\theta]_0^R$$

On a :

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{x_0^2+r^2}}{x_0}\ \ ;\ \tan\theta = \frac{r}{x_0}\ \ ;\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{x_0^2+r^2}}$$

Il faut donc calculer :

$$\left[\ln\left|\frac{\sqrt{x_0^2+r^2}}{x_0} + \frac{r}{x_0}\right|\right]_0^R - \left[\frac{r}{\sqrt{x_0^2+r^2}}\right]_0^R$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0} + \frac{R}{x_0}\right| - (\ln(1)-0) - \left(\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right)$$

$$= \ln\left|\frac{R+\sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}\right| - \frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}$$

Le terme $\frac{R+\sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}$ étant forcément positif, on peut supprimer la valeur absolue !

On obtient (enfin !) :

$$\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \ln\left|\frac{R+\sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}\right| - \frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}$$

Et remettant les constantes devant l'intégrale, on a :

$$\boldsymbol{F} = 2\,GM\,x_0\,\rho\,\pi K \int_0^R \frac{r^2\,dr}{(x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\,GM\,x_0\,\rho\,\pi K\left(\ln\left(\frac{R+\sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}\right) - \frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right)$$

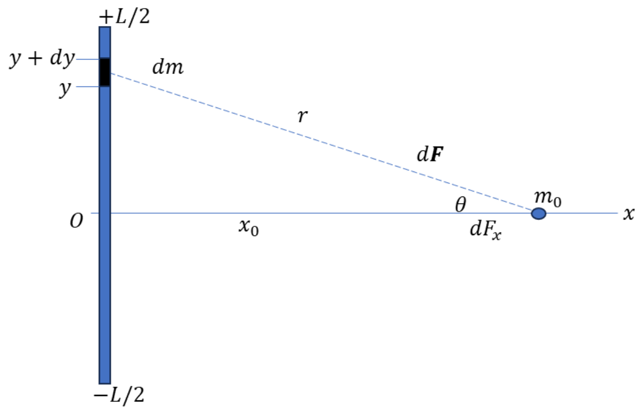
Au niveau des unités, on a :

$$[G] = \frac{N\,m^2}{kg^2}\ ;\ \ [M] = kg\ ;\ [x_0] = m\ ;\ [\rho] = \frac{kg}{m^3}\ ;\ \ [K] = constante$$

$\Rightarrow\ [F] = \frac{N\,m^2}{kg^2}\cdot kg\cdot m\cdot \frac{kg}{m^3} = N$. Les unités sont donc bien respectées !

Retour à l'énoncé

Solution 39 (réf 141)



a) Il s'agit d'une application de $F = -\frac{GMm_0}{r^2}$ adapté à une tige.

L'idée est de calculer dF pour un élément de tige dy et ensuite d'intégrer sur toute la longueur de la tige. Ici,

$$dF = G\frac{m_0\,dM}{r^2}$$

Avec $r^2 = x_0^2 + y^2$

Or, la densité linéaire de la tige vaut $\lambda = \frac{M}{L}$, donc, $\lambda = \frac{dM}{dy}\ \Rightarrow dM = \lambda\,dy = \frac{M}{L}dy$. Il suit :

$$dF = G\frac{m_0\,dM}{r^2} = G\frac{m_0 M\,dy}{L\,(x_0^2+y^2)}$$

qu'on intègrera sur la longueur, soit de $-L/2$ à $+L/2$.

D'autre part, par symétrie miroir par rapport à O, on voit que tout élément dm aura un élément symétrique (de l'autre côté de O), tel que les composantes de F selon y s'annulent. Il restera donc les composantes selon x.

$$dF_x = dF\cos(\theta) = dF\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{m_0M\,dy}{L\,(x_0^2+y^2)}\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{m_0M\,dy}{L\,(x_0^2+y^2)}\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\right)$$
$$= G\frac{m_0M\,x_0\,dy}{L\,(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Et donc,

$$\boldsymbol{F} = \int dF = \int_{-L/2}^{L/2} G\frac{m_0M\,x_0\,dy}{L\,(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Gm_0Mx_0}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Concentrons-nous sur $\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ dont l'astuce de résolution est un grand classique (bien que pas facile à deviner si on ne l'a pas vu auparavant …) en posant :

$$\boldsymbol{y = x_0\,tan\theta} = x_0\frac{sin\theta}{cos\theta} \Rightarrow dy = x_0\frac{cos\theta cos\theta + sin\theta sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = x_0\frac{1}{\cos^2\theta} = x_0\sec^2\theta\ d\theta$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{x_0\,sec^2\theta\ d\theta}{(x_0^2+x_0^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{x_0\,sec^2\theta\ d\theta}{x_0^3\,(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{sec^2\theta\ d\theta}{x_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \int\frac{sec^2\theta\ d\theta}{x_0^2\,(sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x_0^2}\int\frac{sec^2\theta\ d\theta}{sec^3\theta} = \frac{1}{x_0^2}\int\frac{1\,d\theta}{sec\ \theta}$$
$$= \frac{1}{x_0^2}\int cos\theta\,d\theta = \frac{1}{x_0^2}\,sin\theta$$

Or, on voit sur la figure que $r\,sin\theta = y \Rightarrow sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{(x_0^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x_0^2}\left[\frac{y}{(x_0^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{x_0^2}\left(\frac{L}{\left(x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{L}{x_0^2\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Remettant les constantes $\frac{Gm_0Mx_0}{L}$ devant l'intégrale, on obtient finalement :

$$\boldsymbol{F} = \frac{Gm_0Mx_0}{L}\cdot\frac{L}{x_0^2\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \boldsymbol{\frac{Gm_0M}{x_0\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}}$$

b) Utilisons (comme suggéré dans l'énoncé) $\lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow M = \lambda\,L$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = \frac{Gm_0M}{x_0\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{Gm_0\lambda L}{x_0\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Faisons tendre L vers l'infini.

$$\lim_{L\to\infty} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{L}{\frac{L}{2}} = 2$$

D'où, lorsque $L \longrightarrow \infty$

$$\boldsymbol{F = \frac{2\, Gm_0\lambda}{x_0}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 40 (réf 102)

D'une part, la force gravitationnelle du système Soleil - Terre est : $F_g = G\frac{M_S M_T}{r_{TS}^2}$.
D'autre part, on suppose que la Terre orbite sur une trajectoire quasi-circulaire pour ce problème. Il existe donc une force centripète :$F_c = m_T \cdot \frac{v^2}{r_{TS}}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_S M_T}{r_{TS}^2} = M_T \cdot \frac{v^2}{r_{TS}} \Rightarrow M_S = r_{TS} \cdot \frac{v^2}{G}$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_{TS}$ parcourue en un temps $t = \tau = 365{,}25\, jours = 365{,}25 * 24 * 3600\ s$
Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_{TS}}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_{TS}^2}{\tau^2}$

Donc, au final :

$$M_S = r_{TS} \cdot \frac{v^2}{G\,\tau^2} = \frac{4\,\pi^2 r_{TS}^3}{\tau^2\ \cdot G} = \frac{4\,\pi^2\,(1{,}495 \times 10^{11})^3}{(365{,}25 * 24 * 3600)^2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11}} = \mathbf{2{,}00 \times 10^{30}}\boldsymbol{kg}$$

Retour à l'énoncé

Solution 41 (réf 103)

D'une part, la force gravitationnelle du système Lune – Satellite est : $F_g = G\frac{M_l M_s}{r^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire. Il existe donc une force centripète : $F_c = m_s \cdot \frac{v^2}{r^2}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_l M_s}{r_{ls}^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_{ls}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_l}{r_{ls}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_l}{r_{ls}}}$$

Attention : $r_{ls} = (1738 + 62)\ km = 1800 \times 10^3 m$

$$\Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{GM_l}{r_{ls}}} = v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ \cdot\ 7{,}35 \times 10^{22}}{1800 \times 10^3}} = 1650\ m/s$$

Retour à l'énoncé

Solution 42 (réf 104)

D'une part, la force gravitationnelle du système Lune – satellite est : $F_g = G\frac{M_l M_s}{r_{ls}^2}$.

D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Lune. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s \cdot \frac{v^2}{r_{ls}}$.

Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_l M_s}{r_{ls}^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_{ls}} \Rightarrow G\frac{M_l}{r_{ls}} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_{ls}$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche

Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_{ls}}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_{ls}^2}{\tau^2}$

Donc, $G\frac{M_l}{r_{ls}} = v^2 \Leftrightarrow G\frac{M_l}{r_{ls}} = \frac{4\,\pi^2 r_{ls}^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_{ls}^3}{G\,M_l} \Rightarrow \tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_{ls}^3}{G\,M_l}}$

où $r_{ls} = 1{,}740 \times 10^6 + 60 \times 10^3 = 1{,}8 \times 10^6\ m$

$\Rightarrow\ \tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_{ls}^3}{G\,M_l}} = \tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{(1{,}8 \times 10^6\,)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 7{,}35 \times 10^{22}}} =\ 6{,}85 \times 10^3 s \approx 1{,}9\ heure$

Retour à l'énoncé

Solution 43 (réf 105)

D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\frac{M_T M_s}{r_T^2}$.

D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T}$.

Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_s}{r_T^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_T} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_T$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche

Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2}$

Donc, $G\frac{M_T}{r_T} = v^2 \Leftrightarrow G\frac{M_T}{r_T} = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^3}{G\,M_T} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\,M_T}} = 2\frac{\pi}{G\,M_T}\sqrt{r_T^3}$

$$= \frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}975 \times 10^{24}}}\sqrt{r_T^3} = \mathbf{3,15 \times 10^{-7}}\sqrt{\boldsymbol{r_T^3}}\ \boldsymbol{secondes}$$

Retour à l'énoncé

Solution 44 (réf 106)

D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\frac{M_T M_s}{r_T^2}$.

D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T}$.

Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_s}{r_T^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_T} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_T$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche

Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2}$

Donc, $G\frac{M_T}{r_T} = v^2 \Leftrightarrow G\frac{M_T}{r_T} = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^3}{G\,M_T} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\,M_T}} = 2\frac{\pi}{G\,M_T}\sqrt{r_T^3} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}975 \times 10^{24}}}\sqrt{r_T^3}$$

$$= \mathbf{3,15 \times 10^{-7}}\sqrt{\boldsymbol{r_T^3}}\ \boldsymbol{secondes}$$

Pour $r_T = 6950 \times 10^3\ m$, cela donne : $\tau = 3{,}15 \times 10^{-7}\sqrt{(6950 \times 10^3)^3} = 5{,}77 \times 10^3\ s.$

Retour à l'énoncé

Solution 45 + 46 (réf 107)

a) D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\frac{M_T M_S}{r_T^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_S \cdot \frac{v^2}{r_T}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_S}{r_T^2} = M_S \cdot \frac{v^2}{r_T} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_T} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_T$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche
Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2}$
Donc, $G\frac{M_T}{r_T} = v^2 \Leftrightarrow G\frac{M_T}{r_T} = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^3}{G\,M_T} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\,M_T}} = 2\frac{\pi}{G\,M_T}\sqrt{r_T^3}$$

Pour un corps attracteur donné (ici on a pris la Terre, mais cela peut être le Soleil, la Lune, etc), on a donc : $\mathrm{T(r)} \propto r^{\frac{3}{2}}$
Dès lors, pour un rayon r_1, on a : $\mathrm{T}_1 \propto r_1^{\frac{3}{2}}$ et pour $r_2 = 2\,r_1$, on a $\mathrm{T}_2 \propto r_2^{\frac{3}{2}} = (2r_1)^{\frac{3}{2}}$
De sorte que :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2r_1)^{\frac{3}{2}}}{r_1^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2r_1}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} \approx 2{,}8$$

$$\Rightarrow T_2 \approx 2{,}8\,T_1$$

b) Nous partons de $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi}{\tau}$

Donc, $v_1 = \frac{2\pi r_1}{\tau_1}$ et $v_2 = \frac{2\pi r_2}{\tau_2}$. Mais $r_2 = 2r_1$ et $T_2 \approx 2{,}8\,T_1$ (vu en (a))
➔ $v_2 = \frac{4\pi r_1}{2{,}8\,\tau_1}$

D'où :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{4\pi r_1}{2{,}8\,\tau_1}}{\frac{2\pi r_1}{\tau_1}} = \frac{2}{2{,}8} = 0{,}71 \quad \Rightarrow v_2 = 0{,}71\,v_1$$

Retour à l'énoncé

Solution 47 (ref 108)

On cherche l'accélération gravitationnelle due à la Lune, d'un corps situé sur la Terre.

On utilise la définition de g pour un corps attracteur, ici la Lune :

$$g_l = \frac{GM_l}{r^2}$$

Ici, r est la distance Terre-Lune.

$$g_l = \frac{GM_l}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{7{,}35 \times 10^{22}}{(3{,}844 \times 10^8)^2} = 3{,}32 \times 10^{-5}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 48 (ref 109)

On cherche l'accélération gravitationnelle induite par une petite sphère de masse 1 kg.
On utilise la définition de g pour un corps attracteur, ici la petite sphère :

$$g_s = \frac{GM_s}{r^2}$$

Ici, r est la distance sphère – objet test, soit 1 m.

$$g_s = \frac{GM_s}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{(1)^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 49 (ref 110)

On cherche l'accélération gravitationnelle due au Soleil, d'un corps situé sur la Terre.
On utilise la définition de g pour un corps attracteur, ici le Soleil :

$$g_S = \frac{GM_S}{r^2}$$

Ici, r est la distance Terre-Soleil.

$$g_S = \frac{GM_S}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1{,}987 \times 10^{30}}{(1{,}495 \times 10^{11})^2} = 5{,}93 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 50 (ref 120)

Rappelons la 3ème loi de Kepler :
« Pour toutes les planètes, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand-axe est constant », ce qu'on écrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = C\ (Cste)$$

Exprimant T en années terrestres et a en UA (unité astronomique), on a pour la **Terre** :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1\ (année)}{1\ (UA)} = 1$$

Donc, dans les **mêmes unités**(!), on doit avoir, pour **Jupiter :**

$$\frac{T_J^2}{a_J^3} = 1 \Leftrightarrow T_j = \sqrt{a_J^3} = \sqrt{(5{,}2028)^3} \approx 11{,}868 \text{ années terrestres}.$$

Retour à l'énoncé

Solution 51 (ref 121)

Le plus simple est d'exploiter la troisième loi de Kepler en se servant de la Terre pour obtenir la constante qui nous servira à faire le calcul.
Rappelons la 3ème loi de Kepler :
« Pour toutes les planètes, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand-axe est constant », ce qu'on écrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = C\ (Cste)$$

Dans le cas de la Terre, où a est exprimé en unité astronomique (UA) et vaut donc 1, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1\ (année)}{1\ (UA)} = 1$$

Calculons d'abord 597,9 millions de km en UA afin de garder les mêmes unités !
$1\ UA = 1{,}495 \times 10^{11}\ m$, donc, $597.9 \times 10^9\ m = 3{,}999\ UA$.

Puisque l'astre attracteur pour le satellite est aussi le Soleil, la constante vaut 1 également et donc :

$$T_s^2 = 1 \cdot (3{,}999)^3 \Rightarrow \boldsymbol{T_s} = \sqrt{(3{,}999)^3} = \boldsymbol{7{,}998\ années.}$$

Retour à l'énoncé

Solution 52 (ref 122)

Partons de la force gravitationnelle d'un corps de masse m orbitant autour d'un astre de masse M : $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$.

La force centripète nécessaire pour maintenir ce corps en orbite vaut : $F_c = \frac{mv^2}{r}$.

Les deux forces étant égales, on a : $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

Pour une révolution complète, on a $v = \frac{x}{t} \overset{1\ tour}{=} \frac{2\pi r}{\tau} \Rightarrow v^2 = 4\frac{\pi^2 r^2}{\tau^2}$

Égalant les deux expressions de v^2, on obtient : $\frac{GM}{r} = 4\frac{\pi^2 r^2}{\tau^2} \Leftrightarrow \frac{\tau^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{GM} \Leftrightarrow \frac{r^3}{\tau^2} = \frac{GM}{4\,\pi^2}$

Or, la troisième loi de Kepler exprime justement que pour une orbite circulaire :

$$\frac{r^3}{\tau^2} = C\ (constante).$$

Donc, $C = \frac{GM}{4\,\pi^2} \Rightarrow \frac{C}{M} = \frac{G}{4\,\pi^2} =$

Retour à l'énoncé

Solution 53 + 54 (ref 123)

a) Considérons d'abord les forces sur m_1 . Alors :

$$F_1 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}$$

Et comme m_1 tourne autour de O: $F_{c1} = \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = \frac{m_1}{r_1}\left(\frac{2\pi r_1}{T_1}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}$

Considérons ensuite les forces sur m_2 . Alors :

$$F_2 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}$$

Et comme m_2 tourne autour de O: $F_{c2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2} = \frac{m_2}{r_2}\left(\frac{2\pi r_2}{T_2}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}$

On voit que $F_1 = F_2$, or $F_1 = F_{C1}$ et $F_2 = F_{C2}$ donc $F_{C1} = F_{C2}$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2} \overset{T_1=T_2}{\Longleftrightarrow} m_1 r_1 = m_2 r_2 \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

b) Comme $F_1 = F_{c1}$: $\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$ (1)

De même : $F_2 = F_{c2}$: $\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$ (2)

Sommons membre à membre (1) et (2) :

$$\frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2} + \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$$

$$\overset{T_1=T_2=T}{\Longleftrightarrow} \frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2} + \frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} + \frac{4\pi^2 r_2}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(m_1+m_2)}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2(r_1+r_2)}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{(r_1+r_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\,\pi^2}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 55 (ref 124)

La distance moyenne au Soleil est bien sûr la moyenne arithmétique de l'aphélie et du périhélie, soit :

$$< r_i > = \frac{(1{,}97 + 0{,}186)}{2}\, UA = 1{,}078\, UA$$

On utilise la troisième loi de Kepler. Il est capital de retenir que dans un système donné $\frac{T^2}{a^3} = constante.$

En particulier, dans le système solaire et prenant la Terre comme référence, on a $\frac{T^2}{a^3} = 1$ en prenant $T = 1\ \boldsymbol{an}$ et $a = 1\ \boldsymbol{UA}$. Donc, **dans les mêmes unités**, $\frac{T^2}{a^3} = 1$ pour toutes les planètes ou objets orbitant autour de la Terre.

Dans ce problème : $a = 1{,}08\, UA \Rightarrow a^3 = 1{,}2527$

Donc, $\frac{T^2}{a^3} = 1 \ \Rightarrow T = \sqrt{(\,a)^3} = \sqrt{1{,}2527} \approx 1{,}12\ années.$

Retour à l'énoncé

Solution 56 (ref 125)

Soient M_{31}, la masse de la galaxie M31 et m la masse de l'étoile périphérique.

On a : $F_{gravitation} = F_{cenripète} \Leftrightarrow \frac{GM_{31}m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow \frac{GM_{31}}{r} = v^2 \ \Rightarrow M_{31} = \frac{r\,v^2}{G}$

Or $r = 5 \times 10^9$ UA $= 5 \times 10^9 \cdot 1{,}495 \times 10^{11}\ m$

$$\Rightarrow \quad M_{31} = \frac{r\,v^2}{G} = \frac{(5\times 10^9 \cdot 1{,}495\times 10^{11}) \cdot (2\times 10^5)^2}{6{,}67\times 10^{-11}} = 4{,}5 \times 10^{41}\ kg$$

Retour à l'énoncé

Solution 58 (ref 126)

Considérons un anneau de masse M et de rayon R, de densité linéique uniforme.

Prenons un élément de masse dm sur l'anneau : le champ qu'il crée au centre a pour norme $g = G\frac{dm}{R^2}$ et est dirigé vers dm.

Pour chaque élément dm à un certain angle, il existe un élément diamétralement opposé dm' créant un champ dg' de même norme mais de direction opposée.
Par symétrie, tous les vecteurs $\vec{g}$ élémentaires se compensent deux à deux, donc le champ gravitationnel au centre est nul !

Retour à l'énoncé

Solution 59 (ref 127)

On donne T_J (1,7699 jours terrestres) et $r = 5{,}578\ R_j$ (rayons de Jupiter).
On cherche ρ_J sachant que $\rho_J = \frac{M_J}{V_J} = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}$
Tous les paramètres étant rapportés à Jupiter, je n'indique plus l'indice « j » pour alléger l'écriture.
Convertissons la période de Jupiter en secondes :

$$T = 1{,}7699 \cdot 24 \cdot 3600\ s = 152919{,}36\ s$$

Les données de T et r doivent vous faire penser à la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \mathcal{C}$ pour une masse attractrice donnée. Que vaut $\mathcal{C}$?

Partons, comme d'habitude de $F_g = F_c \Leftrightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

Ensuite : $v = \frac{circonférence}{période} = \frac{2\,\pi r}{T}$. Donc, $v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{4\,\pi^2\,r^2}{T^2}$

Et donc : $T^2 = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{GM}$ et donc, la masse M de Jupiter vaut : $M = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{GT^2}$

Or, on l'a vu plus haut : $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ et de plus l'énoncé donne $r = 5{,}578\ R_J$

On a donc au final :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,r^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,(5{,}578\,R)^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,(5{,}578\,R)^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\,\pi R^3}$$

$$= \frac{4\,\pi^2\,(5{,}578\,R)^3}{GT^2} \cdot \frac{3}{4\,\pi\,R^3} = \frac{3\,\pi \cdot (5{,}578)^3}{G\,T^2} = \frac{3\,\pi \cdot (5{,}578)^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\,(152919)^2}$$

$$= 1048\ \frac{kg}{m^3}$$

Ce qui, soit dit au passage est environ 5 fois moins dense que la Terre et à peine plus élevée que la densité de l'eau. Jupiter est une planète gazeuse.

Retour à l'énoncé

Solution 60 (réf 142)

Appelons m_A, la masse de Sirius A et m_B, la masse de Sirius B. Les deux étoiles orbitent autour de leur barycentre O avec r_A, la distance de Sirius A à O et r_B, la distance de Sirius B à O.

c) Considérons d'abord les forces sur m_A . Alors :

$$F_A = \frac{Gm_Am_B}{(r_A+r_B)^2}$$

Et comme m_A tourne autour de O: $F_{cA} = \frac{m_Av_A^2}{r_A} = \frac{m_A}{r_A}\left(\frac{2\pi r_A}{T_A}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_A r_A}{T_A^2}$

Considérons ensuite les forces sur m_B . Alors :

$$F_B = \frac{Gm_Am_B}{(r_A+r_B)^2}$$

Et comme m_B tourne autour de O: $F_{cB} = \frac{m_Bv_B^2}{r_B} = \frac{m_B}{r_B}\left(\frac{2\pi r_B}{T_B}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_B r_B}{T_B^2}$

On voit que $F_A = F_B$, or $F_A = F_{cA}$ et $F_B = F_{cB}$ donc $F_{cA} = F_{cB}$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 m_A r_A}{T_A^2} = \frac{4\pi^2 m_B r_B}{T_B^2} \overset{T_A=T_B}{\Longleftrightarrow} m_A r_A = m_B r_B \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{r_A}{r_B} = \frac{m_B}{m_A}}$$

L'énoncé précise que $r_B = 2\,r_A$, donc $\frac{r_A}{2\,r_A} = \frac{m_B}{m_A} \Rightarrow m_B = 2\,m_A$

d) Comme $F_A = F_{cA}$: $\frac{Gm_Am_B}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 m_A r_A}{T_A^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_B}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 r_A}{T_A^2}$ (1)

De même : $F_B = F_{cB}$: $\frac{Gm_Am_B}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 m_B r_B}{T_B^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_A}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 r_B}{T_B^2}$ (2)

Sommons membre à membre (1) et (2) :

$$\frac{Gm_B}{(r_A+r_B)^2} + \frac{Gm_A}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 r_A}{T_A^2} + \frac{4\pi^2 r_B}{T_B^2}$$

$$\overset{T_A=T_B=T}{\Longleftrightarrow} \frac{Gm_B}{(r_A+r_B)^2} + \frac{Gm_A}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 r_A}{T^2} + \frac{4\pi^2 r_B}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G\,(m_A+m_B)}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2(r_A+r_B)}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{(r_A+r_B)^3}{T^2} = \frac{G(m_A+m_B)}{4\,\pi^2}}$$

D'où $m_A + m_B = \frac{4\,\pi^2\,(r_A+r_B)^3}{G\,T^2} = \frac{4\,\pi^2\,(2{,}99\times10^{12})^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot\,(50\cdot365\cdot24\cdot3600)^2} = 6{,}34\times10^{30}\,kg$

Or, (a) : $m_B = 2\,m_A \;\Rightarrow 3\,m_A = 6{,}34\times10^{34}\,kg \;\Rightarrow m_A = 2{,}1\times10^{30}\,kg$
Et donc $m_B = 2\,m_A = 4{,}2\times10^{30}kg$

Retour à l'énoncé

Solution 61 (réf 143)

D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\,\frac{M_T M_s}{r_s^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s\cdot\frac{v^2}{r_s}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\,\frac{M_T M_s}{r_s^2} = M_s\cdot\frac{v^2}{r_s} \;\Rightarrow G\,\frac{M_T}{r_s} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_{tl}$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche
Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \;\Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_S^2}{\tau^2} \Rightarrow v = \frac{2\pi r_s}{\tau} = \frac{2\pi r_{tl}}{\tau\,2} = \frac{\pi r_{tl}}{\tau}$ (nous y reviendrons)

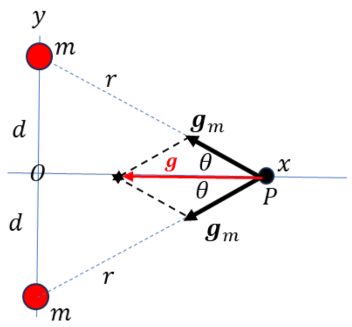
Donc, $G\,\frac{M_T}{r_s} = v^2 \;\Leftrightarrow\; G\,\frac{M_T}{r_s} = \frac{4\,\pi^2 r_S^2}{\tau^2} \;\Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_S^3}{G\,M_T} \;\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{r_S^3}{G\,M_T}} = 2\,\frac{\pi}{G\,M_T}\,\sqrt{r_S^3}$

$$= \frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\;\cdot\;5{,}975\times10^{24}}}\sqrt{\left(\frac{r_{tl}}{2}\right)^3} = 3{,}15\times10^{-7}\sqrt{\left(\frac{3{,}844\times10^8}{2}\right)^3}\quad secondes$$
$$= 839334\;s = 9{,}71\;jours$$

Revenant sur $v = \frac{\pi r_{tl}}{\tau}$, on a $v = \frac{\pi\;\,3{,}844\times10^8}{839334} = 1438\;m/s$

Retour à l'énoncé

Solution 62 (réf 144)



Vu la symétrie de la position des masses de part et d'autre de O, les composantes de g selon l'axe Y s'annulent (la composante selon Y de l'une des masses annule celle créée par l'autre masse).
Restent donc les composantes selon l'axe X, dirigées dans le même sens (voir figure).
De manière générale, $g_m = \frac{Gm}{r^2}$.
Ici, $g = 2\, g_m \cos\theta$ (le '2' car chacune des 2 masses apporte sa contribution).
D'où,

$$g = 2\, g_m \cos\theta = 2\, \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{2\, G\, m\, x}{r^3} = \frac{2\, G\, m\, x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Retour à l'énoncé