GRAVITATION
et
LOIS DE KEPLER

Entièrement rédigé et corrigé par Laurent HARDY

Exercice 1 (réf 82)

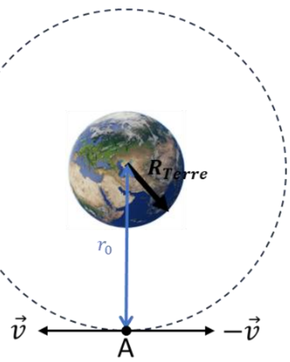
Lors d'une manœuvre de mise en orbite autour de la Terre de deux satellites identiques de masse m, les astronautes d'une navette spatiale de transport commettent une erreur qui a pour conséquence désastreuse de mettre ces deux satellites simultanément sur une même orbite circulaire de rayon $r_0 > R$ (R étant le rayon de la Terre) mais dans des directions opposées (voir la figure).

1. Quelle est la norme, v, de la vitesse de chacun de ces satellites sur leur orbite commune ?
2. À compter de l'instant de leur mise en orbite circulaire à partir du même point A, après combien de temps entrent-ils en collision ? En quel point B de l'orbite cette collision a-t-elle lieu ? Indiquez ce point sur la figure.
3. Lors de la collision, les deux satellites restent encastrés l'un dans l'autre. Quelle est alors leur vitesse commune après la collision ? Quelle est l'énergie dissipée lors de cette collision ?
4. Après cette collision, les deux satellites tombent vers la surface de la Terre. En négligeant le frottement de l'atmosphère, quelle sera la norme, v_1, de leur vitesse au moment de leur choc avec le sol ?
5. Toujours en négligeant le frottement de l'atmosphère, quel intervalle de temps s'écoule-t-il entre la collision des deux satellites sur leur orbite et leur choc avec le sol ?

Remarques :

i) Les résultats sont à exprimer en termes de r_0, g, R et m.

ii) Un changement de variable utile pour évaluer l'intégrale $\int dr\,\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$ est $r = r_0 \cos^2 x$

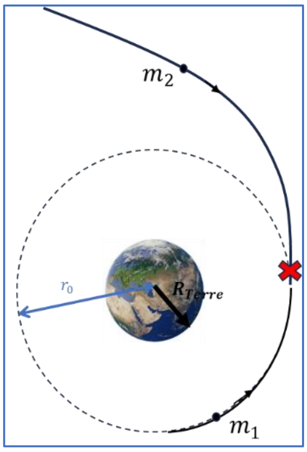


Solution

Exercice 2 (réf 83)

Dans l'environnement spatial proche d'un corps céleste de masse M, de rayon R et qui possède une distribution de masse à symétrie sphérique, on observe l'approche d'un autre corps céleste assimilé à un point matériel et de masse inconnue $m_2 \ll M$. Par rapport au corps de masse M, la trajectoire de celui de masse m_2 est parabolique, avec une distance minimale au périgée mesurée comme étant $r_0 > R$. Pour commodité ultérieure, la combinaison $\sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ qui possède la dimension physique d'une vitesse est dénotée par v_0, soit $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$.

Afin de mesurer m_2 en piégeant cet objet, on place en orbite autour du corps de masse M et sur une trajectoire circulaire de rayon r_0 un troisième corps assimilé à un point matériel et de masse connue $m_1 < m_2 \ll M$. Cette trajectoire circulaire se situe dans le même plan que celui de la trajectoire parabolique de m_2. Tandis que la mise en orbite de m_1 est synchronisée de manière telle que m_1 rentre en collision avec m_2 au moment même lorsque m_2 atteint son périgée, chacun de ces corps se déplaçant à cet instant dans des directions opposées (voir la figure ci-dessous). Suite à cette collision frontale les deux corps restent encastrés, pour alors nécessairement suivre une trajectoire elliptique dont le lieu de collision est soit le périgée, soit l'apogée. En observant ensuite la distance de l'autre point extrême de cette trajectoire, il devient ainsi possible de déterminer la valeur du rapport $\lambda = \frac{m2}{m1}$, soit donc celle de la masse m_2. Dans l'analyse de ce système, l'attraction gravitationnelle entre les deux corps de masses m_1 et m_2 est négligée en comparaison de leurs interactions individuelles avec le corps de masse M . La constante universelle de la gravitation de Newton est dénotée G.



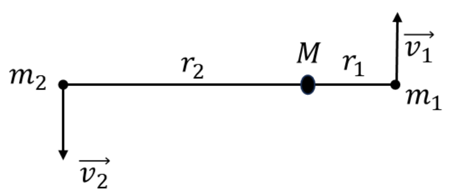
1. Déterminez la norme, v_1, exprimée en termes de v_0, de la vitesse du corps de masse m_1 sur son orbite circulaire de rayon r_0. Évaluez son énergie mécanique totale, E_1, ainsi que la période, T_1, de son mouvement.
2. Déterminez la norme, v_2, exprimée en termes de v_0, de la vitesse du corps de masse m_2 sur son orbite parabolique à l'instant d'atteindre son périgée, juste avant que la collision n'ait lieu.
3. Déterminer la norme, V, et la direction de la vitesse des deux corps encastrés juste à l'instant qui suit leur collision frontale. Exprimez la valeur de V en terme du rapport $\lambda = \frac{m2}{m1}$. Et par relation inverse identifiez l'expression de la valeur du rapport des masses, λ, en terme de $\frac{V}{v_0}$.
4. Déterminez les périgée et apogée de la trajectoire elliptique suivie par les deux corps désormais encastrés en fonction de r_0 et $\frac{V}{v_0}$. En déduire la valeur de $\frac{V}{v_0}$ en terme des distances à l'apogée et au périgée.
5. En déduire la valeur du rapport des masses, $\lambda = \frac{m2}{m1}$, en fonction des distances à l'apogée et au périgée.

Solution

Exercice 3 (réf 84)

Deux satellites identiques de masses m_1 et m_2, avec $m_1 = m = m_2$ sont en orbite autour d'une planète de masse M et dont la distribution de masse est à symétrie sphérique. À un instant donné, la configuration du système est telle qu'illustrée dans la figure. Le satellite de masse m_1 est alors à une distance $r_1 = r_0$ du centre de la planète, et possède une vitesse perpendiculaire à cette position et de norme $v_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \frac{1}{2}v_0$ (G étant la constante de Newton). Le satellite de masse m_2 est alors en une position diamétralement opposée à celle de m_1 par rapport au centre de la planète, à une distance $r_2 = \frac{25}{7}r_0$ de cette dernière, et avec une vitesse perpendiculaire à sa position relative à la planète, de norme $v_2 = \frac{7}{20}\sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \frac{7}{20}v_0$, et de sens opposé à celle du satellite de masse m_1 (voir la figure). Le plan du mouvement des deux satellites est identique. L'attraction gravitationnelle entre les deux satellites est négligée en comparaison de celle avec la planète.
On rappelle que pour le problème de Kepler gravitationnel de masses m et M , la période T d'une trajectoire elliptique de demi-grand axe a est donnée par $T = 2\pi\sqrt{\mu\frac{a^3}{GmM}}$, μ étant la masse réduite associée.

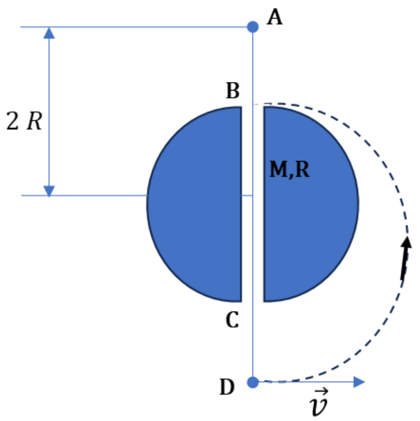
1. Quelle est la nature géométrique de l'orbite de m_1 ? Justifiez avec précision.
2. Déterminez les distances $r_{1,\pm}$ et les normes $v_{1,\pm}$ des vitesses de m_1 en ses apogée ($r_{1,+}$,$v_{1,+}$) et périgée ($r_{1,-}$, $v_{1,-}$) ainsi que la période T_1 de ce mouvement.
3. Quelle est la nature géométrique de l'orbite de m_2? Justifiez avec précision.
4. Déterminez les distances $r_{2,\pm}$ et les normes $v_{2,\pm}$ des vitesses de m_2 en ses apogée et périgée ainsi que la période T_2 de ce mouvement.
5. Sur base de ces résultats, et de la valeur du rapport $\frac{T_2}{T_1}$, expliquez avec précision pourquoi et en quel lieu les deux satellites rentrent-ils en collision.
6. Suite à leur collision, les deux satellites restent encastrés l'un dans l'autre. Quelle est la norme V de leur vitesse commune à l'instant qui suit cette collision ? Quelle est la nature géométrique de la trajectoire qu'ils suivent alors ? Justifiez avec précision.



Solution

Exercice 4 (réf 85)

Afin de gagner vos galons de pilote intersidéral, vous devez réussir une dernière épreuve avec votre vaisseau spatial de masse m, dans une manœuvre audacieuse au voisinage d'un corps céleste d'un genre tout particulier, et isolé dans l'Univers (donc seule son attraction gravitationnelle importe). Ce corps sphérique, de masse totale $M \gg m$ et de rayon R, possède une distribution homogène de masse.
Cependant, il est traversé, suivant un de ses diamètres, d'un tunnel rectiligne juste assez large pour laisser passer votre vaisseau, ce tunnel étant aligné par ailleurs avec l'axe de rotation du corps sur lui-même (voir la figure).
L'objet de la manœuvre consiste à se placer, immobile, en un point A à la verticale de l'entrée B de ce tunnel BC, à une distance $r_0 = 2R$ du centre du corps céleste, et ensuite à se laisser tomber, tous moteurs éteints, au travers du tunnel, pour atteindre le point D diamétralement opposé avec une vitesse nulle à nouveau.
Ensuite, en ce point D, il s'agit d'allumer très brièvement les moteurs afin de communiquer instantanément à votre vaisseau une vitesse de norme v dans une direction perpendiculaire à AD. Les moteurs étant coupés aussitôt, la valeur de v doit être choisie telle que la trajectoire alors suivie par votre vaisseau (maintenant libre à nouveau) l'amène de retour en l'entrée B du tunnel mais cette fois tangentiellement à la surface du corps céleste et sans vous écraser sur celui-ci. Comme preuve de votre exploit, il vous faut ramener, cueillie au passage, une de ces mystérieusement belles fleurs de Lune poussant aux entrées de ce tunnel ...



1. Que vaut la norme F de la force de poussée des moteurs qui maintient votre vaisseau immobile en A ?
2. Afin que votre manœuvre réussisse, à quelle valeur la norme v doit-elle être ajustée ? Comment cette valeur se compare-t-elle avec celle de la norme v_0 de la vitesse de votre vaisseau s'il suivait une trajectoire circulaire de rayon $r_0 = 2R$?
3. Quelle est alors la norme v' de la vitesse de votre vaisseau frôlant la surface du corps au point B ?
4. Lors de la chute ABCD, quelle est la norme v_B de la vitesse de votre vaisseau aux points B et C du tunnel ?
5. Expliquez pourquoi une fois dans le tunnel, le mouvement est harmonique avec la fréquence angulaire $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$. Déterminez le temps Δt_{BC} de traversée du tunnel.

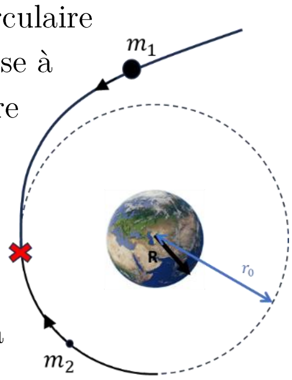
6. Montrez pourquoi le temps de chute Δt_{AB} du point A à l'entrée B du tunnel est donnée par l'expression

$$\Delta t_{AB} = \int_{R}^{2R} \frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right)}}$$

7. A l'aide du changement de variable $r = 2R\sin^2 u$ pour l'´evaluation de cette intégrale, déterminez la valeur Δt_{AD} du temps de chute total de A à D.

Solution

Exercice 5 (réf 86)



Un objet ponctuel de masse $m_2 = m\sqrt{2}$ est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un corps céleste étendu de distribution de masse à symétrie sphérique, de masse totale M et de rayon $R < r_0$. Un autre objet ponctuel de masse $m_1 = m$ est placé sur une orbite parabolique autour de ce même corps de masse M , avec un périgée de distance r_0 également par rapport au centre du corps de masse M. Les mouvements de rotation de ces deux objets ponctuels se font dans le même plan, mais dans des directions opposées cependant (voir la figure). Par un heureux ou malheureux concours de circonstances, l'objet de masse m_1 atteint son périgée, situé sur l'orbite de l'objet de masse m_2, au même instant que ce dernier atteint également ce point de son orbite ; il y a donc collision et les deux objets restent encastrés l'un dans l'autre.

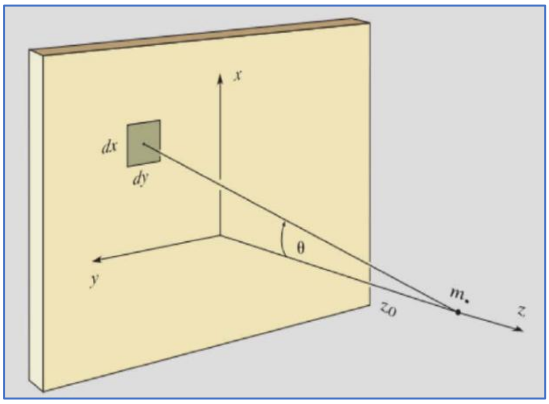
1. Quelle est la norme, v_1, de la vitesse de l'objet de masse m_1 en son périgée à la distance r_0 du centre du corps de masse M ?
2. Quelle est la norme, v_2, de la vitesse de l'objet de masse m_2 sur son orbite circulaire de rayon r_0 ?
3. Quelle est la période, T_2, du mouvement circulaire de l'objet de masse m_2 ?
4. A l'instant qui suit la collision des deux objets, quelle est la norme, V , de leur vitesse désormais commune ?
5. Quelle est l'énergie dissipée, ΔE, lors de cette collision ?
6. Après cette collision, les deux objets tombent vers la surface du corps de masse M. En ignorant l'éventuel frottement de l'atmosphère, quelle sera la norme, V_0, de leur vitesse au moment de leur choc avec la surface du corps de masse M ?
7. Toujours en négligeant l'éventuel frottement de l'atmosphère, quel intervalle de temps, Δt, s'écoule-t-il entre la collision des deux objets et leur choc avec la surface du corps de masse M ?

Remarques :
i) Les résultats sont à exprimer en terme de r_0, G, M, R et m.
ii) Il est évidemment supposé que $M \gg m_1, m_2$.
iii) Un changement de variable utile pour évaluer l'intégrale $\int dr \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right]^{-\frac{1}{2}}$ est $r = r_0 \cos^2 x$

Solution

Exercice 6 (réf 128)

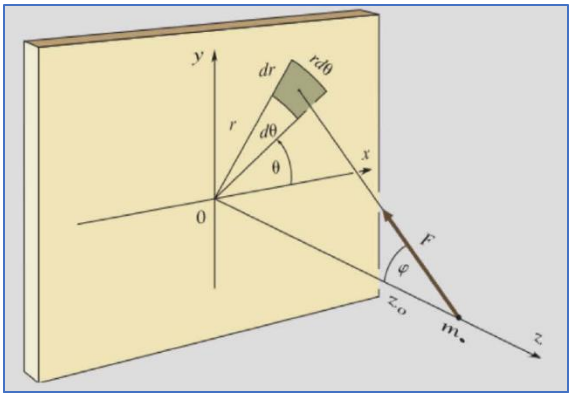
Une très grande plaque plate, d'épaisseur τ, de densité uniforme ρ occupe le plan xy. Une masse ponctuelle (m_0) est située à une distance z_0 sur l'axe des z. Écrire une expression de l'intégrale qui exprime la force gravitationnelle sur m_0 due à son interaction avec la plaque. Faites le calcul en coordonnées **cartésiennes** en supposant que $z_0 \gg \tau$. **Ne calculez pas l'intégrale.**



Solution

Exercice 7 (réf 129)

Une très grande plaque plate circulaire, d'épaisseur τ, de densité uniforme ρ occupe le plan xy. Une masse ponctuelle (m_0) est située à une distance z_0 sur l'axe des z. Écrire une expression de l'intégrale qui exprime la force gravitationnelle sur m_0 due à son interaction avec la plaque. Faites le calcul en coordonnées **polaires** en supposant que $z_0 \gg \tau$.
Que devient cette force F_z si $R \gg z_0$?



Solution

Exercice 8 (réf 130)

On veut tirer un projectile (de masse m) verticalement de la surface d'une planète de masse M et de rayon R.

a) Montrez que la vitesse minimum, avec laquelle le projectile doit être lancé pour atteindre un point situé à une distance r du centre de la planète, est donnée par :

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}$$

[Suggestion : utilisez $a = vdv/dr$ et le fait que $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Prenez la verticale vers le haut comme sens positif].

b) Déterminer la vitesse minimum avec laquelle on doit lancer un projectile non propulsé, de la surface de la Terre, pour qu'il puisse échapper complètement au champ gravitationnel de la planète. C'est ce qu'on appelle la vitesse de libération. [Suggestion : il faut qu'à l'infini, la vitesse du projectile soit nulle].

Solution

Exercice 9 (réf 131)

Considérons une planète, de masse M et rayon R, et un petit objet, de masse m, tombant sur elle d'une distance r_0. Établir une expression de la vitesse de l'objet en fonction de sa distance r au centre de la planète, sachant que pour $r = r_0$, $v = 0$. Si la planète est la Terre, dont l'accélération de la pesanteur à la surface est g_0, donnée par $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$, montrer que la vitesse avec laquelle m frappe la surface est $v = \sqrt{2\, R_T g_0}$, si r_0 est très grand. [Suggestion : utiliser l'équation $vdt = dr$ pour obtenir vdv au premier membre et $\frac{dr}{r^2}$ au second membre].

Solution

Exercice 10 (réf 132)

Une tige mince, de longueur L et de masse m, est placée le long de l'axe des x positifs, de façon que son extrémité la plus proche de l'origine soit d'abscisse x_0. Trouver la force gravitationnelle qu'elle exerce sur une masse ponctuelle M, qui se trouve à l'origine. Est-ce que l'interaction serait la même si toute la masse de la tige était concentrée en son centre ? Que devient l'interaction si $x_0 \gg L$? [Suggestion : partager la tige en petits segments assimilables à des masses ponctuelles dm].

Solution

Exercice 11 (réf 133)

Déterminez le taux de variation de g_T avec la distance, près de la surface de la Terre. Calculez la valeur numérique de cette quantité en mètres par seconde au carré par mètre. Gardez trois chiffres significatifs.
On donne :

- Masse de la Terre $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$
- Rayon moyen de la Terre $R_T = 6{,}371\ 23 \times 10^{6}\ m$
- $G = 6{,}672\ 59 \times 10^{-11}\ N\frac{m^2}{kg^2}$

Solution

Exercice 12 (réf 134)

Un anneau métallique mince de centre O, de rayon R et de masse m, se trouve dans le plan yz. Une masse ponctuelle M_0 est située sur son axe Ox à l'abscisse x_0. Déterminer la force gravitationnelle exercée par l'anneau sur la masse M_0. Est-ce que l'anneau se comporte comme si toute sa masse était concentrée en son centre ? Que devient l'interaction si $x_0 \gg R$? [Suggestion : commencer par trouver la force due à un petit secteur, c'est-à-dire un élément différentiel, dm, de l'anneau].

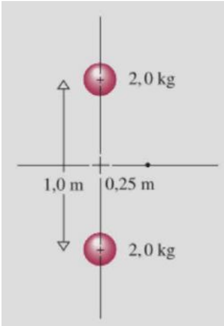
Solution

Exercice 13 (réf 135)

a) Écrire l'expression de la force gravitationnelle exercée par un nuage sphérique uniforme de masse M et rayon R sur une petite masse m à l'intérieur du nuage. On suppose la particule à une distance $r < R$.
b) Quelle est l'intensité du champ gravitationnel à l'intérieur d'une sphère pleine et uniforme de masse M et de rayon R, à une distance $R/2$ du centre ?

Solution

Exercice 14 (réf 136)



Deux boules de cristal de $2{,}0\ kg$ sont distantes de $1{,}0\ m$. Déterminer le module et la direction de la force gravitationnelle qu'elles exercent sur une bille de $10\ g$ située à égale distance de ces boules et à $0{,}25\ m$ de la droite qui joint leurs centres.

Solution

Exercice 15 (réf 137)

Une étoile à neutrons peut être imaginée comme un noyau immense soudé par sa propre gravitation. Quelle est la période de rotation de cette étoile au-dessus de laquelle elle éjecte de la matière équatoriale ? Prendre $\rho = 10^{17}\ kg/m^3$. Il est largement admis que les pulsars, étranges émetteurs célestes de rayonnements pulsés, sont des étoiles à neutrons en rotation rapide.

Solution

Exercice 16 (réf 138)

Tracez le graphique représentant la variation du poids d'un objet de masse m en fonction de l'altitude h au-dessus de la surface de la Terre jusqu'à environ $700\ km$. Que pouvez-vous dire de cette courbe (tant que $R \gg h$) ?

Solution

Exercice 17 (réf 139)

Soit M la masse d'une planète sphérique, homogène et de rayon R. Montrer que l'accélération gravitationnelle absolue g_{p} varie avec la hauteur h au-dessus de la surface de la planète suivant l'expression :

$$g_p = \frac{GM}{R^2}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2}$$

Cette expression peut être approximée, en utilisant le développement du binôme:

$$(a+x)^n = a^n + n\,a^{n-1}x + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}\,x^2 + \cdots$$

où $x^2 < a^2$. Ici, $a = 1$, $x = \frac{h}{R}$, $n = -2$. Si $h \ll R$. En vous limitant aux deux premiers termes,

a) Montrez que :

$$g_p = \frac{GM}{R^2}\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Notez que GM/R^2 est précisément la valeur de g_p sur la surface $(h\ =\ 0)$

b) Calculer l'accélération de la pesanteur à $10\,000\,m$ au-dessus de la surface de la Terre de deux façons :

(1) en utilisant $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ et

(2) en utilisant l'approximation trouvée en a). Comparer les deux résultats.

c) Déterminer l'accélération gravitationnelle subie par le Module Lunaire quand il était à 100 m au-dessus de la surface de la Lune. Est-elle sensiblement différente de sa valeur sur la surface de la Lune ?

On donne :

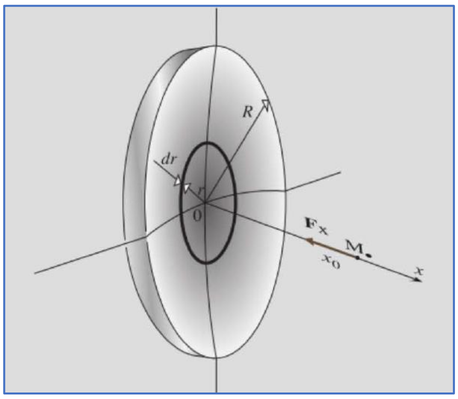
- Masse de la Terre $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\,kg$
- Rayon moyen de la Terre $R_T = 6{,}371\,23 \times 10^6\,m$
- $G = 6{,}672\,59 \times 10^{-11}\,N\frac{m^2}{kg^2}$
- Masse de la Lune: $7{,}35 \times 10^{22}\,kg$
- Rayon moyen de la Lune $R_L = 1{,}74 \times 10^6\,m$

Solution

Exercice 18 (réf 140)

Attention : nécessite une bonne connaissance de trigonométrie et une bonne pratique du calcul intégral avec des fonctions trigonométriques ou … une table d'intégrales sous la main 😉 !

La figure ci-contre représente un disque concave mince de densité ρ, dont l'épaisseur τ augmente linéairement vers la périphérie à partir d'un trou minuscule au centre, de façon que $\tau = Kr$, où K est une constante.



a) Déterminez la force gravitationnelle agissant sur une masse ponctuelle (M) située à une distance x_0 sur l'axe. (a) Il vous suffit d'utiliser une intégrale familière et que vous pouvez trouver dans les tables d'intégrales. Vous trouverez :

$$F_x = 2\pi K\rho MG\, x_0 \left(\ln \frac{R + \sqrt{R^2 + x_0^2}}{x_0} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \right)$$

[Suggestion : partagez le disque en anneaux concentriques, chacun ayant une masse dm. Écrivez la loi de gravitation universelle en termes de L (la distance de l'anneau à M), dm et θ pour chaque anneau puis intégrez sur le disque.]

b) Vérifiez les unités de l'équation trouvée.

Solution

Exercice 19 (réf 141)

Une longue tige mince, de masse M et de longueur L est placée le long de l'axe des y avec son centre à l'origine.

(a) Trouver la force gravitationnelle qu'elle exerce sur une masse ponctuelle (m_0) située sur l'axe des x, à une distance x_0.

(b) En supposant constante la masse par unité de longueur (masse linéique) λ_m de la tige, trouver la valeur de la force lorsque L tend vers l'infini.

Solution

Exercice 20 (réf 142)

Les étoiles binaires Sirius A et Sirius B décrivent des orbites, autour de leur barycentre, avec une période de 50 ans. Leur distance est de $20{,}0\ UA\ (ou\ 2{,}99 \times 10^{12}\ m)$. L'étoile la moins brillante, Sirius B, est deux fois plus éloignée du barycentre que Sirius A. Calculer leurs masses

Solution

Exercice 21 (réf 143)

On voudrait placer un satellite artificiel de la Terre en orbite circulaire à mi-distance Terre-Lune. Calculer sa période et la vitesse orbitale nécessaire.

- On donne la distance Terre-Lune : $r_{TL} = 3{,}844 \times 10^8 m$

Solution

Exercice 22 (réf 144)

Deux corps, de même masse m, sont situés sur l'axe des y à une distance d au-dessus et au-dessous de l'origine. Montrer que l'intensité du champ gravitationnel en tout point P de l'axe des x, situé à une distance x de l'origine, est donnée par :

$$g = \frac{2\,G\,m\,x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Noter que la distance du point P aux corps $est\, r = (x^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$.

Solution

Exercice 23 (réf)

Solution

Exercice 24 (réf)

Solution

Exercice 25 (réf)

Solution

Exercice 26 (réf)

Solution

Exercice 27 (réf)

Solution

Exercice 28 (réf)

Solution

Exercice 29 (ref)

Solution

Exercice 30 (ref)

Solution

Exercice 31 (réf)

Solution

Exercice 32 (réf)

Solution

Exercice 33 (réf)

Solution

Exercice 34 (réf)

Solution

Exercice 35 (réf)

Solution

Exercice 36 (réf)

Solution

Exercice 37 (réf)

Solution

Exercice 38 (réf)

Solution

Exercice 39 (réf)

Solution

Exercice 40 (réf)

Solution

Exercice 41 (réf)

Solution

Exercice 42 (réf)

Solution

Exercice 43 (réf)

Solution

SOLUTIONS DES EXERCICES SUR LA GRAVITATION ET LES LOIS DE KEPLER

Gravitation et Lois de Kepler

Solution 1 (réf 82)

1. Dans le cadre du MCU, chacun des satellites va subir une accélération centripète (2ème loi de Newton) dirigée vers le centre de la Terre : $F = ma = \frac{mv^2}{r_0}$. Or, dans le repère de Frenet, cette force n'est autre que la force de gravitation dirigée également vers le centre de la Terre $F = \frac{GMm}{r_0^2}$. Donc :

$$F = \frac{mv^2}{r_0} = G\frac{Mm}{r_0^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r_0} \qquad (1)$$

Mais l'énoncé précise bien « les résultats sont à exprimer en termes de r_0, g, R et m », ce qui n'est pas le cas dans cette réponse !

On va donc se ramener au niveau du sol ($r = R$, là où l'accélération vaut g). Au niveau du sol terrestre, on a $F = mg = G\frac{Mm}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2$ de sorte que (1) devient :

$$v^2 = \frac{GM}{r_0} = \frac{gR^2}{r_0} \Rightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}}$$

2. Chacun des 2 satellites orbitant à la même vitesse mais en sens opposé, il est évident que la collision aura lieu en **<u>B, point diamétralement opposé à A</u>**. Le temps mis par chacun des satellites pour arriver en B est bien sûr d'une **demi**-période.

Calculons la période :

$$v = \frac{x}{t} \overset{MCU}{=} \frac{2\pi r_0}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{2\pi r_0}{v} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}} = 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{gR^2}}$$

Or, le temps Δt_1 recherché correspond à une **demi-période**, soit :

$$\boldsymbol{\Delta t_1 = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{gR^2}}}$$

3. a) Au point A (au moment de se séparer), chacun des satellites a une quantité de mouvement mv mais dans des directions opposées, la quantité de mouvement totale du système est donc nulle ! Pendant leur périple jusqu'au point B, aucune nouvelle force n'est retiré ni ajoutée et donc aucune différence de quantité de mouvement non plus ! Dès lors, lors de la collision, la quantité de mouvement initiale (nulle) est conservée et est donc nulle également au moment où ils s'encastrent. Après collision, le système a donc une **<u>vitesse nulle</u>** !

b) Entre le point A et le point B, l'énergie potentielle ne varie pas, vu que celle-ci ne dépend que du rayon de l'orbite, celui-ci ne changeant à aucun moment. Il n'y a

donc pas de variation d'énergie potentielle suite à la collision. Reste alors l'énergie cinétique !
Avant la collision, l'énergie cinétique du système vaut celle du satellite 1 + celle du satellite 2, soit $\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=mv^2$. Après la collision, la vitesse de chaque satellite étant nulle, l'énergie cinétique du système est nulle également.
Au final, $\Delta E_{cin}=E_{cin_{fin}}-E_{cin_{ini}}=0-mv^2=-mv^2\overset{\text{question 2}}{=}-m\frac{gR^2}{r_0}$
Le signe « moins » exprime cette dissipation d'énergie due à la collision.

4. On va utiliser le grand principe de la conservation de l'énergie en calculant l'énergie totale au moment de la collision et, vu sa conservation, l'égaler à l'énergie totale au moment de toucher le sol ! Aussi, dès que la collision a eu lieu, la seule et unique force qui sera en jeu est la force gravitationnelle qui va faire chuter tout le système vers la Terre.
Une fois la collision faite, la masse du système vaut $2m$ et son énergie potentielle vaut $E_{p-collision}=-GM\cdot\frac{2m}{r_0}=-2m\frac{gR^2}{r_0}$. De plus, on a calculé ci-dessus que l'énergie cinétique juste après la collision, est nulle (elle s'est dissipée). Donc, l'énergie TOTALE, qui d'ailleurs sera conservée tout au long de la chute vaut :

$$\mathbf{E_{TOT}}=E_{Cin}+E_{Pot}=0-2m\frac{gR^2}{r_0}=\mathbf{-2m\frac{gR^2}{r_0}}$$

Au moment de toucher le sol à la vitesse recherchée, notée v_1, on a :

- $E_{cin_{sol}}=\frac{2mv_1^2}{2}=mv_1^2$
- $E_{pot_{sol}}=-2m\frac{gR^2}{R}=-2mgR$
- $\mathbf{E_{TOT}}=E_{Cin_{sol}}+E_{Pot_{sol}}=mv_1^2-2mgR=\mathbf{-2m\frac{gR^2}{r_0}}$ **(car $\mathbf{E_{tot}}$ est conservée)**

D'où :

$$mv_1^2-2mgR=-2m\frac{gR^2}{r_0}\Longrightarrow v_1^2=2gR-\frac{2gR^2}{r_0}=2gR\left(1-\frac{R}{r_0}\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\mathbf{v_1=\sqrt{2gR\left(1-\frac{R}{r_0}\right)}}}$$

5. De la question (4), on sait que à tout moment pendant la chute l'énergie totale vaut $E_{tot}=\mathbf{-2m\frac{gR^2}{r_0}}$

Or, à tout moment de la chute :

- $E_{cin}(t)=\frac{2mv^2(t)}{2}=mv^2(t)=m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$
- $E_{pot}(t)=-2m\frac{gR^2}{r}$

On peut donc écrire qu'à tout moment de la chute :

$$E_{tot} = E_{cin}(t) + E_{pot}(t) \Leftrightarrow m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2m\frac{gR^2}{r} = -2m\frac{gR^2}{r_0}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\frac{gR^2}{r} - 2\frac{gR^2}{r_0} = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Piège ! Il est évident que lorsque le temps t s'écoule, $r(t)$ diminue (suite à la chute) et donc $\frac{dr}{dt}$ est forcément négatif. Donc, en passant à la $\sqrt{\square}$ à gauche et à droite, il faut bien veiller à considérer que la partie droite de l'équation sera négative, donc :

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \Leftrightarrow dt = -\frac{dr}{\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}$$

D'où :

$$\Delta t_2 = \int_0^t dt = -\int_{r_0}^R \frac{dr}{\sqrt{2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{2gR^2}}\int_{r_0}^R \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}$$

Heureusement … l'énoncé nous aide en conseillant une substitution : $r = r_0 \cos^2 x$.
Dans ce cas : $dr = -2r_0 \cos(x)\sin(x)\,dx$
Et aussi, quand

- $r = r_0\,;\;\; r_0 = r_0\cos^2(x) \;\Rightarrow x = \arccos(1) = 0$
- $r = R\,;\;\; R = r_0\cos^2(x) \;\Rightarrow x = \arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2gR^2}}\int_{r_0}^R \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}} = \frac{2\,r_0}{\sqrt{2gR^2}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_0\cos^2 x} - \frac{1}{r_0}\right)}}$$

$$= \frac{2\,r_0}{\sqrt{2gR^2}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_0\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{r_0\cos^2 x}\right)}} = \frac{2\,r_0}{\sqrt{2gR^2}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1-\cos^2 x}{r_0\cos^2 x}\right)}}$$

$$= \frac{2\,r_0\cdot\sqrt{r_0}}{\sqrt{2gR^2}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x}\right)}} = \frac{2\,r_0\cdot\sqrt{r_0}}{\sqrt{2gR^2}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{2\,r_0\cdot\sqrt{r_0}}{\sqrt{2gR^2}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \cos^2(x)\,dx$$

Or, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\frac{2\,\mathrm{r_0}\cdot\sqrt{\mathrm{r_0}}}{\sqrt{2\mathrm{gR^2}}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}\cos^2(x)\,dx=\frac{2\,\mathrm{r_0}\cdot\sqrt{\mathrm{r_0}}}{\sqrt{2\mathrm{gR^2}}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx$$

$$=\frac{2\,\mathrm{r_0}\cdot\sqrt{\mathrm{r_0}}}{\sqrt{2\mathrm{gR^2}}}\left[\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{\mathrm{r_0^3}}}{\sqrt{2\mathrm{gR^2}}}\left[\frac{1}{2}\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\frac{1}{4}\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{\mathrm{r_0^3}}}{\sqrt{2\mathrm{gR^2}}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\frac{1}{2}\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\Delta t_2=\frac{\sqrt{r_0^3}}{\sqrt{2gR^2}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\frac{1}{2}\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\right]}}$$

On note au passage que si $\mathrm{r_0}=\mathrm{R}$, $\Delta\mathrm{t_2}=0$, ce qui est normal et … réconfortant après ce calcul !

Si vous aimez la trigonométrie, vous pouvez aller un cran plus loin, sachant que :

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ et aussi,
- $\sin(arcos\ x)=\sqrt{1-x^2}$

Alors : $\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)=2\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)=2\sqrt{\frac{R}{r_0}}\sqrt{1-\frac{R}{r_0}}$

D'où :

$$\boldsymbol{\Delta t_2=\frac{\sqrt{r_0^3}}{\sqrt{2gR^2}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\sqrt{\frac{R}{r_0}}\sqrt{1-\frac{R}{r_0}}\right]}$$

Retour à l'énoncé

Solution 2 (réf 83)

1. Dans le cadre du MCU, le corps de masse m_1 subit une accélération centripète (2ème loi de Newton) dirigée vers le centre de la Terre : $F=m_1a=\frac{mv_1^2}{r_0}$. Or, dans le repère de Frenet, cette force n'est autre que la force de gravitation dirigée également vers le centre de la Terre $F=\frac{GMm_1}{r_0^2}$. Donc :

$$F=\frac{mv_1^2}{r_0}=G\frac{Mm_1}{r_0^2}\Rightarrow v_1^2=\frac{GM}{r_0}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{GM}{r_0}}\overset{def}{=}v_0$$

L'énergie mécanique totale n'est autre que $\mathbf{E_{TOT}} = \mathrm{E_{Cin}} + \mathrm{E_{Pot}}$

$$\Longrightarrow \ \mathbf{E_{TOT}} = \frac{\mathrm{m_1 v_1^2}}{2} - \frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_0}} = \frac{\mathrm{m_1}}{2} \cdot \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r_0}} - \frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_0}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_0}} = -\frac{1}{2}\mathrm{m_1 v_0^2} < 0$$

Le signe « moins » est normal, il indique bien que la trajectoire du corps de masse m_1 est 'liée' à l'astre attracteur (la Terre) donc, elliptique.

Calculons la période :

$$v_1 = \frac{x}{t} \overset{MCU}{=} \frac{2\pi r_0}{\tau} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \frac{2\pi r_0}{v_1} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM}{r_0}}} = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{r_0}{GM}} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}}$$

2. L'énoncé précise bien que la trajectoire du corps de masse m_2 est **<u>parabolique</u>**. Le cours théorique nous indique donc que son **<u>énergie totale est nulle</u>** ! (Pour rappel : $E_{tot} < 0$ pour une trajectoire elliptique, $E_{tot} = 0$ pour une trajectoire parabolique, $E\_tot > 0$ pour une trajectoire hyperbolique).

Or l'énergie totale du corps de masse m_2 vaut $\mathbf{E_{TOT}} = \mathrm{E_{Cin}} + \mathrm{E_{Pot}}$

$$\Longrightarrow \ \mathbf{E_{TOT}} = \frac{\mathrm{m_2 v_2^2}}{2} - \frac{\mathrm{GMm_2}}{\mathrm{r_0}} = 0 \ \Leftrightarrow \mathrm{v_2^2} = \frac{\mathrm{2GM}}{\mathrm{r_0}} \Leftrightarrow \mathrm{v_2} = \sqrt{\frac{\mathrm{2GM}}{\mathrm{r_0}}} = \sqrt{2}\,\mathrm{v_0}$$

3. Choisissons la direction du corps 2 comme étant la direction positive.

La quantité de mouvement avant et après la collision est conservée, on a alors :

$$-m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V \ \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} \overset{q2}{=} \frac{m_2\sqrt{2}v_0 - m_1 v_0}{(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{m_2\sqrt{2} - m_1}{(m_1 + m_2)} v_0 = \frac{\frac{m_2}{m_1}\sqrt{2} - 1}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_0 = \frac{\boldsymbol{\lambda\sqrt{2} - 1}}{\boldsymbol{1 + \lambda}} \ \boldsymbol{v_0}$$

Où $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ comme précisé dans l'énoncé.

On a donc $V = \frac{\lambda\sqrt{2}-1}{1+\lambda}\, v_0 \ \Rightarrow V + V\lambda - \lambda\sqrt{2}v_0 + v_0 = 0 \ \Rightarrow \lambda\left(V - \sqrt{2}v_0\right) = -(v_0 + V)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{v_0 + V}{\sqrt{2}v_0 - V} = \frac{\boldsymbol{1 + \frac{V}{v_0}}}{\boldsymbol{\sqrt{2} - \frac{V}{v_0}}}$$

De cette manière, on a ramené λ qui est au départ un rapport de masse, à un rapport de vitesse, avant et après collision. Ainsi (question suivante), connaissant ou calculant le rapport des vitesses par d'autres moyens, nous pourrons en conclure le rapport des masses !

4. Avant collision, l'énergie mécanique du corps de masse m_1 était négative (question 1) et celle du corps m_2 était nulle (trajectoire parabolique). L'énergie totale du système était donc forcément négative avant la collision. Après la collision et donc dissipation d'énergie, l'énergie totale est d'autant plus **négative** qu'avant et la trajectoire

elliptique des 2 corps encastrés, de masse $m_1 + m_2$ et de vitesse V, est donc évidente. L'énoncé précise que la collision a lieu au périgée où $r = r_0$ et ou la vitesse du système encastré vaut maintenant V.

Nommons alors r_+ et V_+, la distance et la vitesse à l'apogée.

Le **moment angulaire** est conservé et donc, le même à l'apogée qu'au périgée, SEULS endroits d'une ellipse où le vecteur direction est perpendiculaire au vecteur vitesse ! Ce qui simplifie le produit vectoriel ($\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ qui devient $L = mrv$)

On a donc :

$$(m_1 + m_2)r_0 V = (m_1 + m_2)r_+ V_+ \Leftrightarrow V_+ = \frac{r_0}{r_+}V$$

Exprimons à présent la conservation de l'énergie du système à l'apogée et au périgée :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - GM\frac{m_1 + m2}{r_0} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_+^2 - GM\frac{m_1 + m2}{r_+}$$

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{r_0} = \frac{1}{2}V_+^2 - \frac{GM}{r_+} \Leftrightarrow \frac{1}{2}V^2 - v_0^2 = \frac{1}{2}V_+^2 - \frac{GM}{r_+} \cdot \frac{r_0}{r_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}V^2 - v_0^2 = \frac{1}{2}V_+^2 - v_0^2 \cdot \frac{r_0}{r_+} \Leftrightarrow V^2 - 2\,v_0^2 = V_+^2 - 2v_0^2 \cdot \frac{r_0}{r_+}$$

Utilisant le fait que $V_+ = \frac{r_0}{r_+}V$, cela devient :

$$V^2 - 2\,v_0^2 = \left(\frac{r_0}{r_+}V\right)^2 - 2v_0^2 \cdot \frac{r_0}{r_+} \Leftrightarrow V^2\left[1 - \left(\frac{r_0}{r_+}\right)^2\right] = 2v_0^2\left[1 - \frac{r_0}{r_+}\right]$$

$$\Leftrightarrow V^2\left(1 - \frac{r_0}{r_+}\right)\left(1 + \frac{r_0}{r_+}\right) = 2v_0^2\left[1 - \frac{r_0}{r_+}\right] \Leftrightarrow 1 + \frac{r_0}{r_+} = \frac{2v_0^2}{V^2}$$

Ce qui nous permet de trouver la distance r_+ de l'apogée, en fonction des termes demandés !

$$1 + \frac{r_0}{r_+} = \frac{2v_0^2}{V^2} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{r_+ = \frac{r_0}{\frac{2v_0^2}{V^2} - 1}}}$$

Et aussi trouver le rapport $\frac{V}{v_0}$ demandé :

$$1 + \frac{r_0}{r_+} = \frac{2v_0^2}{V^2} \Leftrightarrow \frac{V^2}{2v_0^2} = \frac{r_+}{r_+ + r_0} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{V}{v_0} = \sqrt{2\,\frac{r_+}{r_+ + r_0}}}}$$

5. A la question (3), nous avions trouvé que $\boldsymbol{\lambda = \frac{1 + \frac{V}{v_0}}{\sqrt{2} - \frac{V}{v_0}}}$ et en (4), nous avons juste calculé que $\boldsymbol{\frac{V}{v_0} = \sqrt{2\,\frac{r_+}{r_+ + r_0}}}$, donc :

$$\lambda = \frac{1 + \frac{V}{v_0}}{\sqrt{2} - \frac{V}{v_0}} = \frac{1 + \sqrt{2\,\frac{r_+}{r_+ + r_0}}}{\sqrt{2} - \sqrt{2\,\frac{r_+}{r_+ + r_0}}} = \frac{\sqrt{r_+ + r_0} + \sqrt{2\,r_+}}{\sqrt{2(r_+ + r_0)} - \sqrt{2\,r_+}} = \frac{\sqrt{\frac{r_+}{r_0} + 1} + \sqrt{2\,\frac{r_+}{r_0}}}{\sqrt{2(\frac{r_+}{r_0} + 1)} - \sqrt{2\,\frac{r_+}{r_0}}}$$

Et comme par définition : $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$, nous trouvons enfin :

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{r_+}{r_0}+1}+\sqrt{2\,\frac{r_+}{r_0}}}{\sqrt{2(\frac{r_+}{r_0}+1)}-\sqrt{2\,\frac{r_+}{r_0}}}}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 3 (réf 84)

1. Afin de donner une réponse implacable et rigoureuse, il suffit de calculer l'énergie totale du corps de masse m_1. Le signe final donnera la nature de l'orbite (elliptique, parabolique ou hyperbolique).

Dans notre problème : $\mathbf{E_1} = \mathrm{E_{Cin}} + \mathrm{E_{Pot}}$

$$\Longrightarrow \mathbf{E_1} = \frac{\mathrm{m_1 v_1^2}}{2} - \frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_1}} = \frac{1}{2}\mathrm{m_1}\left(\frac{1}{2}\mathrm{v_0}\right)^2 - \frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_0}} = \frac{1}{8}\mathrm{m_1 v_0^2} - \mathrm{m_1 v_0^2} = -\frac{7}{8}\,\mathrm{m_1 v_0^2}$$

m_1 et v_0^2 étant évidemment positifs, $-\frac{7}{8}\,\mathrm{m_1 v_0^2}$ est négatif et donc $E_1 < 0$.

On est donc clairement dans le cas d'une **orbite elliptique** !

2. Le **moment angulaire** est conservé et donc, le même à l'apogée qu'au périgée, SEULS endroits d'une ellipse où le vecteur direction est perpendiculaire au vecteur vitesse ! Ce qui simplifie le produit vectoriel ($\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ qui devient $L = mrv$).

La figure de l'énoncé implique donc obligatoirement que, tant m_1 que m_2 sont soit à leur apogée ou à leur périgée au moment où la situation est figée sur la figure !

On a donc :

$$m_1 r_{1,\pm}\, v_{1,\pm} = m_1 r_1 v_1 = \frac{1}{2}\, m_1 r_0 v_0$$

De point de vue de la conservation de l'énergie totale, on a :

$$\mathrm{E_1} = \frac{m_1}{2}\,(v_{1,\pm})^2 - \frac{\mathrm{GMm_1}}{r_{1,\pm}} = \frac{\mathrm{m_1 v_1^2}}{2} - \frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_1}} \overset{\mathrm{q1}}{=} -\frac{7}{8}\,\mathrm{m_1 v_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{2}\,(v_{1,\pm})^2 - \frac{\mathrm{GMm_1}}{r_{1,\pm}} = -\frac{7}{8}\,\mathrm{m_1 v_0^2}$$

Or $m_1 r_{1,\pm}\, v_{1,\pm} = \frac{1}{2}\, m_1 r_0 v_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_{1,\pm} = \frac{1}{2}\frac{r_0 v_0}{r_{1,\pm}}}$

D'où:

$$\frac{m_1}{2}\,(v_{1,\pm})^2 - \frac{\mathrm{GMm_1}}{r_{1,\pm}} = -\frac{7}{8}\,\mathrm{m_1 v_0^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{r_0 v_0}{r_{1,\pm}}\right)^2 - \frac{\mathrm{GMr_0}}{r_{1,\pm}\, r_0} = -\frac{7}{8}\,\mathrm{v_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}\, v_0^2 \left(\frac{r_0}{r_{1,\pm}}\right)^2 - v_0^2 \left(\frac{r_0}{r_{1,\pm}}\right) + \frac{7}{8}\, v_0^2 = 0 \;\; \Leftrightarrow \frac{1}{8}\left(\frac{r_0}{r_{1,\pm}}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_{1,\pm}}\right) + \frac{7}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{r_0}{r_{1,\pm}}\right)^2 - 8\left(\frac{r_0}{r_{1,\pm}}\right) + 7 = 0$$

Qui est une simple équation quadratique de type $x^2 - 8x + 7 = 0$ où $x = \frac{r_0}{r_{1,\pm}}$

Les racines de $x^2 - 8x + 7 = 0$ sont triviales à trouver et valent $x_1 = 7$ et $x_1 = 1$, soit encore :

- $\frac{r_0}{r_{1,\pm}} = 1 \Rightarrow r_{1,\pm} = r_0$
- $\frac{r_0}{r_{1,\pm}} = 7 \Rightarrow r_{1,\pm} = \frac{r_0}{7}$

On déduit donc que l'apogée (la plus grande distance) est $\boldsymbol{r_{1,+} = r_0}$ et que le périgée (la distance la plus courte) est $\boldsymbol{r_{1,-} = \frac{r_0}{7}}$

Et donc, la vitesse à l'apogée qui vaut $\boldsymbol{v_{1,+} = \frac{1}{2} v_0}$.

Puisque $v_{1,-} = \frac{1}{2}\frac{r_0 v_0}{r_{1,-}}$ (vu plus haut) et que $r_{1,-} = \frac{r_0}{7}$; on a : $\boldsymbol{v_{1,-} = \frac{7}{2} v_0}$

On note au passage que donc, la figure de l'énoncé donnait m_1 à son apogée (puisque $r_1 = r_0$).

Le périgée $(\frac{1}{7} r_0)$ + l'apogée $(r_0) = \frac{8}{7} r_0$ représente le grand axe de l'ellipse. Dès lors, le demi grand axe a, vaut $\frac{4}{7}\, r_0$.

Aussi, puisque $m_1 \ll M$, la masse réduite $\mu \approx m_1$.

Et finalement :

$$\boldsymbol{T_1} = 2\pi\sqrt{\mu\frac{a^3}{GmM}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^3 r_0^3}{GM}} = 2\pi\frac{4}{7}\sqrt{\frac{\frac{4}{7}\, r_0\, r_0^2}{GM}} = 2\pi\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\, r_0\sqrt{\frac{r_0}{GM}}$$
$$= \boldsymbol{2\pi\frac{8}{7\sqrt{7}}\frac{r_0}{v_0}}$$

3. Pour le satellite de masse m_2, c'est littéralement un copié/collé de tout ce qui a été fait pour m_1 en prenant bien soin de considérer que cette fois, l'énonce précise $v_2 = \frac{7}{20}\sqrt{\frac{GM}{r_0}} = \frac{7}{20} v_0$ et aussi que $r_2 = \frac{25}{7} r_0$

Dans notre problème : $\mathbf{E_2} = \mathrm{E_{Cin}} + \mathrm{E_{Pot}}$

$$\Longrightarrow \mathbf{E_2} = \frac{\mathrm{m_2 v_2^2}}{2} - \frac{\mathrm{GMm_2}}{\mathrm{r_2}} \overset{(\mathrm{m_1=m_2=m})}{=} \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\frac{7}{20}\mathrm{v_0}\right)^2 - \frac{7}{25}\frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{r_0}} = \frac{49}{800}\mathrm{mv_0^2} - \frac{7}{25}\mathrm{mv_0^2}$$
$$= -\frac{175}{800}\,\mathrm{mv_0^2} = -\frac{7}{32}\,\mathrm{mv_0^2}$$

m et v_0^2 étant évidemment positifs, $-\frac{7}{32}\,\mathrm{mv_0^2}$ est négatif et donc $E_1 < 0$.

On est donc clairement dans le cas d'une **orbite elliptique** !
De plus, dans la figure, le rayon vecteur étant perpendiculaire au vecteur vitesse, on est obligatoirement soit au périgée, soit à l'apogée.

4. Le **moment angulaire** est conservé et donc, le même à l'apogée qu'au périgée, SEULS endroits d'une ellipse où le vecteur direction est perpendiculaire au vecteur vitesse ! Ce qui simplifie le produit vectoriel ($\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ qui devient $L = mrv$).
La figure de l'énoncé implique donc obligatoirement que, tant m_1 que m_2 sont soit à leur apogée ou à leur périgée au moment où la situation est figée sur la figure !
On a donc :

Rappelant que $m_2 = m\ (= m_1)$

$$m_2 r_{2,\pm}\, v_{2,\pm} = m r_2 v_2 = m \cdot \frac{25}{7} r_0 \cdot \frac{7}{20} v_0 = \frac{5}{4} m r_0 v_0$$

De point de vue de la conservation de l'énergie totale, on a :

$$\mathrm{E}_2 = \frac{m}{2}\left(v_{2,\pm}\right)^2 - \frac{\mathrm{Gmm}}{r_{2,\pm}} = \frac{\mathrm{mv}_2^2}{2} - \frac{\mathrm{GMm}}{\mathrm{r}_2} \overset{\mathrm{q3}}{=} -\frac{7}{32}\,\mathrm{mv}_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2}\left(v_{2,\pm}\right)^2 - \frac{\mathrm{GMm}}{r_{2,\pm}} = -\frac{7}{32}\,\mathrm{mv}_0^2$$

Or $\quad m r_{2,\pm}\, v_{2,\pm} = \frac{5}{4} m r_0 v_0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v_{2,\pm}} = \frac{\mathbf{5}\, \boldsymbol{r_0 v_0}}{\mathbf{4}\, \boldsymbol{r_{2,\pm}}}$

D'où:

$$\frac{m}{2}\left(v_{2,\pm}\right)^2 - \frac{\mathrm{GMm}}{r_{2,\pm}} = -\frac{7}{32}\,\mathrm{mv}_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\frac{r_0 v_0}{r_{2,\pm}}\right)^2 - \frac{\mathrm{GMr}_0}{r_{2,\pm} r_0} = -\frac{7}{32}\,\mathrm{v}_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{32} v_0^2 \left(\frac{r_0}{r_{2,\pm}}\right)^2 - v_0^2\left(\frac{r_0}{r_{2,\pm}}\right) + \frac{7}{32} v_0^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{32}\left(\frac{r_0}{r_{2,\pm}}\right)^2 - \left(\frac{r_0}{r_{2,\pm}}\right) + \frac{7}{32} = 0$$

$$\Leftrightarrow 25\left(\frac{r_0}{r_{2,\pm}}\right)^2 - 32\left(\frac{r_0}{r_{2,\pm}}\right) + 7 = 0$$

Qui est une simple équation quadratique de type $25\,x^2 - 32x + 7 = 0$ où $x = \frac{r_0}{r_{2,\pm}}$

Les racines de $25\,x^2 - 32x + 7 = 0$ sont triviales à trouver et valent $x_1 = \frac{7}{25}$ et $x_1 = 1$, soit encore :

- $\frac{r_0}{r_{2,\pm}} = 1 \Rightarrow r_{2,\pm} = r_0$
- $\frac{r_0}{r_{2,\pm}} = \frac{7}{25} \Rightarrow r_{2,\pm} = \frac{25}{7} r_0$

On déduit donc que l'apogée (la plus grande distance) est $\boldsymbol{r_{2,+}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{r_0}$ et que le périgée (la distance la plus courte) est $\boldsymbol{r_{2,-}} = \boldsymbol{r_0}$

Et donc, la vitesse à l'apogée qui vaut $\boldsymbol{v_{2,+}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}}\boldsymbol{v_0}$.

Puisque $v_{2,-} = \frac{5}{4}\frac{r_0 v_0}{r_{2,-}}$ (vu plus haut) et que $r_{2,-} = r_0$; on a : $\boldsymbol{v_{2,-}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{v_0}$

On note au passage que donc, la figure de l'énoncé donnait m_2 à son apogée.

Le périgée (r_0) + l'apogée $(\frac{25}{7}r_0) = \frac{32}{7}r_0$ représente le grand axe de l'ellipse. Dès lors, le demi grand axe $\boldsymbol{a}$, vaut $\frac{16}{7}\ r_0$.

Aussi, puisque $m_2 \ll M$, la masse réduite $\mu \approx m_2$.

Et finalement :

$$\boldsymbol{T_2} = 2\pi\sqrt{\mu\frac{a^3}{GmM}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{16}{7}\right)^3 r_0^3}{GM}} = 2\pi\frac{16}{7}\sqrt{\frac{\frac{16}{7}\,r_0\,r_0^2}{GM}} = 2\pi\frac{16}{7}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\,r_0\sqrt{\frac{r_0}{GM}}$$
$$= \boldsymbol{2\pi\frac{64}{7\sqrt{7}}\frac{r_0}{v_0}}$$

5. Il apparait des questions (2) et (5) que l'apogée du corps de masse m_1 correspond avec le périgée du corps de masse m_2. Il y a donc potentiellement risque de **collision** !
Encore faut-il pour cela … qu'il s'y rencontre en même temps !
Calculons le rapport des périodes $\frac{T_2}{T_1}$

$$\frac{\boldsymbol{T_2}}{\boldsymbol{T_1}} = \frac{2\pi\frac{64}{7\sqrt{7}}\frac{r_0}{v_0}}{2\pi\frac{8}{7\sqrt{7}}\frac{r_0}{v_0}} = \frac{64}{8} = \mathbf{8}$$

Autrement dit, le corps de masse m_1 orbite 8 fois plus vite que le corps de masse m_2. Ce qui veut dire que pendant que le corps de masse m_2 passe de son apogée à son périgée (1/2 orbite), le corps de masse m_1 aura déjà fait 4 tours complets et à ce moment précis, **ils seront censés collisionner en $\boldsymbol{r_1}$ sur la figure** !

6. Avant la collision (les deux masses tournent dans le même sens !), la quantité de mouvement du système est : $mv_{1,+} + mv_{2,-}$
Après la collision, la quantité de mouvement du système est : $2mV$
La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$2mV = mv_{1,+} + mv_{2,-}$$

Or, $v_{1,+} = \frac{1}{2}v_0$ et $v_{2,-} = \frac{5}{4}v_0$ ➔ $2V = \frac{1}{2}v_0 + \frac{5}{4}v_0 = \frac{7}{4}\ v_0$ ➔ $\boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{v_0}$

L'énergie totale du système encastré vaut :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{7}{8}v_0\right)^2 - \frac{GM(2m)}{r_0} = \frac{49}{64}mv_0^2 - 2mv_0^2 = -\frac{79}{64}mv_0^2$$

$-\frac{79}{64}mv_0^2$ étant bien sûr négatif, on conclut que l'orbite du système encastré est **elliptique** !

Retour à l'énoncé

Solution 4 (ref 85)

1. Au point A, distant de 2R du centre de l'objet céleste, la seule force qui s'exerce sur le vaisseau est la force de gravitation
$$F = \frac{GMm}{(2R)^2} = \frac{GMm}{4\,R^2}$$
Il suffit donc d'avoir une poussée égale à cette force afin de maintenir le vaisseau spatial immobile !

2. Au point D, le vaisseau se trouve à une distance $2R$ du centre de l'objet céleste tandis qu'au point B, il se trouve à une distance R du centre. De même, aux points B et D, les composantes des vitesses sont purement perpendiculaires aux vecteurs positions, ce qui simplifie l'écriture de la conservation du moment angulaire ($\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ qui devient $L = mrv$) :
$$m(2R)v = mRv' \ \Rightarrow v' = 2v$$
La conservation de l'énergie s'écrit quant à elle :
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2R} = \frac{mv'^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{4mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 2mv^2 - \frac{GMm}{R}$$
$$\Rightarrow 3\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{2R} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}}}$$
Si la trajectoire était simplement circulaire de rayon $2R$, on aurait, comme d'habitude :
$$F = ma = \frac{mv_0^2}{2R} = \frac{GMm}{(2R)^2} = \frac{GMm}{4R^2} \Leftrightarrow v_0^2 = \frac{GM}{2R} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$
On constate que $v < v_0$

3. De la question (2), on a calculé que $v' = 2v$ et aussi que $v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$. Il vient donc immédiatement :
$$\boxed{\mathbf{v' = 2\sqrt{\frac{GM}{3R}}}}$$

4. Etant donné la <u>symétrie</u> du problème ainsi que la loi de conservation de l'énergie, il est évident que la vitesse au point B et celle au point C sont les mêmes. De plus $OB = OC = R$

Au point A, la vitesse est nulle :

- Energie cinétique $E_{cin_A} = 0$
- Energie potentielle $E_{pot_A} = -\frac{GMm}{2R}$
- => Energie totale : $E_{tot_A} = -\frac{GMm}{2R}$

Au point B :

- Energie cinétique $E_{cin_B} = \frac{mv_b^2}{2}$
- Energie potentielle $E_{pot_B} = -\frac{GMm}{R}$
- => Energie totale : $E_{tot_B} = \frac{mv_b^2}{2} - \frac{GMm}{R}$

La conservation de l'énergie implique :

$$E_{tot_A} = E_{tot_B} \Leftrightarrow -\frac{GMm}{2R} = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{GMm}{R} \Leftrightarrow -\frac{GM}{2R} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{GM}{R} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{v_B} = \sqrt{\frac{\mathbf{GM}}{\mathbf{R}}} = \mathbf{v_c}}$$

5. Soit $r(t)$, la position du vaisseau en fonction du temps (lors de sa chute ABCD) et choisissons $r(t)$ positif dans la parie supérieure (càd sur le segment ABO).

Rappelons surtout le **théorème de Gauss** appliqué à la gravitation, lequel démontre que lorsqu'un objet se trouve à l'intérieur d'une sphère parfaite et homogène (même densité de masse partout), la force de gravitation qui s'applique à cet objet ne dépend <u>**QUE**</u> du rayon et de la masse de la sphère qui se trouve sous ce corps. Au centre de la sphère, ce corps est même en flottaison ($g = 0$) puisqu'il est attiré (vectoriellement) de toute part par la même intensité de force !

Lorsque $r(t)$ évolue, la masse de la sphère au niveau de $r(t)$ vaut :

$$M\big(r(t)\big) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi |r(t)|^3$$

Alors que la masse de l'objet céleste vaut $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

D'où :

$$\frac{M\big(r(t)\big)}{M} = \frac{|r(t)|^3}{R^3} \Leftrightarrow M\big(r(t)\big) = M\left(\frac{|r(t)|}{R}\right)^3$$

On met $r(t)$ en valeur absolue car la masse ne dépend que de $r(t)$ que celle-ci soit positive ou négative !

De plus, lorsque le vaisseau descend de B vers O (là où $r(t) > 0$) , la force d'attraction ressentie vaut $F = -\frac{GM(r(t))m}{r^2(t)}$ alors

$$F = -\frac{GM\big(r(t)\big)\,m}{r^2(t)}$$

Et donc :

$$F = -\frac{GM\,m}{R^3}r(t)$$

Mais $F = ma = m\ddot{r}(t)$

Donc :

$$m\ddot{r}(t) = -\frac{GM\,m}{R^3}r(t) \Leftrightarrow \ddot{r}(t) + \frac{GM}{R^3}r(t) = 0$$

Ceci est l'équation 'grand classique' du type $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ de l'oscillateur harmonique. Par identification, on a donc : $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$ et donc $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}}$

La solution générale de cette équation est généralement $r(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Cependant, lorsque le vaisseau entre dans le tunnel au temps, disons t_B, il a déjà une vitesse (v_B, que l'on a calculé) et du temps s'est déjà écoulé lors de son entrée puisqu'il vient du point A où $t = 0$. Il convient donc de généraliser un peu plus la solution afin de pouvoir y intégrer des conditions initiales spécifiques en t_0, moment où l'objet entre dans le tunnel !

La solution la plus générale possible devient donc:

$$r(t) = A\cos\omega(t - t_B) + B\sin\omega(t - t_B).$$

- On sait que $r(t = t_B) = R$, donc $r(t = t_B) = R = A\ \cos\omega(0) + B\sin 0 \ \Rightarrow A = R$
  La solution devient :
  $$r(t) = R\cos\omega(t - t_B) + B\sin\omega(t - t_B).$$

- On sait également que $\dot{r}(t = t_B) = -v_B$ (attention au signe 'moins' : l'axe de référence étant choisi vers le haut, la vitesse vers le bas est négative !).
  $$\begin{aligned} & r(t) = R\cos\omega(t - t_B) + B\sin\omega(t - t_B) \\ \Rightarrow\ & \dot{r}(t) = -R\omega\sin\omega(t - t_B) + B\omega\cos(t - t_B) \\ \Rightarrow\ & \dot{r}(t = t_B) = -v_B = B\omega\,1 \\ \Rightarrow\ & B = -\frac{v_B}{\omega} \end{aligned}$$
  La solution particulière devient donc :
  $$r(t) = R\cos\omega(t - t_B) - \frac{v_B}{\omega}\sin\omega(t - t_B)$$
  Or $\frac{v_B}{\omega} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R}}}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = R$
  D'où
  $$r(t) = R\left[\cos\omega(t - t_B) - \sin\omega(t - t_B)\right]$$

On recherche Δt_{BC}. Celui-ci, par simple symétrie, est égal à 2 fois Δt_{BO}.

Or, en O (le centre de l'objet), on sait aussi que $r(t = t_O) = 0$!

Donc :

$$r(t = t_O) = 0 = R\left[\cos\omega(t_O - t_B) - \sin\omega(t_O - t_B)\right]$$

Ce qui implique : $\cos\omega(t_O - t_B) = \sin\omega(t_O - t_B)$

Or : $\cos x = \sin x \quad \Leftrightarrow x = 45° = \frac{\pi}{4}$

Donc ici : $\omega(t_O - t_B) = \frac{\pi}{4}$ et il suit : $\Delta t_{BO} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{GM}{R^3}}} = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

Et puisque $\Delta t_{BC} = 2\,\Delta t_{BO}$, on a finalement :

$$\boxed{\Delta t_{BC} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$$

6. Hors de la surface de l'objet céleste, utilisons le fameux principe de la conservation de l'énergie entre le point A et le point B :

Au point A, la vitesse est nulle :

- Energie cinétique $E_{cin_A} = 0$
- Energie potentielle $E_{pot_A} = -\frac{GMm}{2R}$
- => Energie totale : $E_{tot_A} = -\frac{GMm}{2R}$

En un point quelconque $r(t) > R$:

- Energie cinétique $E_{cin}(t) = \frac{m}{2}\dot{r}^2(t)$
- Energie potentielle $E_{pot}(t) = -\frac{GMm}{r(t)}$
- => Energie totale : $E_{tot} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(t) - \frac{GMm}{r(t)}$

La conservation de l'énergie implique :

$$-\frac{GMm}{2R} = \frac{m}{2}\dot{r}^2(t) - \frac{GMm}{r(t)}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{GM}{R} + 2\frac{GM}{r(t)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{dt}{dr} = \pm\frac{1}{\sqrt{2\,GM\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{2R}\right)}}$$
$$\Leftrightarrow dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{2\,GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right)}}$$

On veut intégrer sur r allant du point A au point B, soit de $r = 2R$ à $r = R$.
Sur ce segment, la vitesse $\dot{r}(t)$ est négative, donc :

$$\Delta t_{AB} = \int_R^{2R} \frac{dr}{\sqrt{2\,GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2R}\right)}}$$

Ce qu'il fallait démontrer.
Notons immédiatement que par symétrie, $\Delta t_{CD} = \Delta t_{AB}$ et que donc :

$$\Delta t_{ABCD} = \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD} = 2\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = 2\Delta t_{AB} + \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

7. Nous venons juste de démontrer que $\Delta t_{ABCD} = 2\Delta t_{AB} + \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

Pour évaluer

$$\Delta t_{AB} = \int_R^{2R} \frac{dr}{\sqrt{2\ GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}\right)}}$$

L'énoncé nous propose le changement de variable $r = 2R\sin^2 u$

De sorte que $dr = 2R2\sin u\cos u\ du = 4R\sin u\cos u\ du$

Et aussi, quand :

- $r = R\ ;\ R = 2R\sin^2 u \Leftrightarrow \sin^2 u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin u = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4}$
- $r = 2R\ ;\ 2R = 2R\sin^2 u \Leftrightarrow \sin^2 u = 1 \Leftrightarrow \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$

Et de même,

$$\sqrt{2\ GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}\right)} = \sqrt{2\ GM\left(\frac{1}{2R\sin^2 u}-\frac{1}{2R}\right)} = \sqrt{2\ GM\left(\frac{1}{2R\sin^2 u}-\frac{\sin^2 u}{2R\ \sin^2 u}\right)} =$$

$$\sqrt{2\ GM\left(\frac{\cos^2 u}{2R\ \sin^2 u}\right)} = \sqrt{\frac{GM}{R}\left(\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\right)} = \frac{\cos u}{\sin\ u}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AB} = \int_R^{2R} \frac{dr}{\sqrt{2\ GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}\right)}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4R\sin u\cos u\ du}{\frac{\cos u}{\sin\ u}\sqrt{\frac{GM}{R}}} = 4\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\ du$$

Or ; $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ *et* $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u \Rightarrow \cos^2 u = \cos 2u + \sin^2 u$

d'où $\sin^2 u = 1 - (\cos 2u + \sin^2 u) = 1 - \cos 2u - \sin^2 u$

et finalement : $2\sin^2 u = 1 - \cos 2u \Rightarrow \mathbf{\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)}$

Donc :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\ du = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2u\ du = \frac{1}{2}\ [u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\sin 2u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AB} = 4\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u\ du = 4\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

Et :

$$\mathbf{\Delta t_{ABCD}} = 2\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = \mathbf{\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)}$$

Retour à l'énoncé

Solution 5 (réf 86)

1. L'énoncé précise bien que la trajectoire du corps de masse m_1 est **parabolique**. Le cours théorique nous indique donc que son **énergie totale est nulle** ! (Pour rappel : $E_{tot} < 0$ pour une trajectoire elliptique, $E_{tot} = 0$ pour une trajectoire parabolique, $E\_tot > 0$ pour une trajectoire hyperbolique).

Or l'énergie totale du corps de masse m_2 vaut $\mathbf{E_{TOT}} = \mathrm{E_{Cin}} + \mathrm{E_{Pot}}$

$$\Rightarrow \mathbf{E_{TOT}} = \frac{\mathrm{m_1 v_1^2}}{2} - \frac{\mathrm{GMm_1}}{\mathrm{r_0}} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v_1^2} = \frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{r_0}} \Leftrightarrow \mathrm{v_1} = \sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{r_0}}}$$

2. Dans le cadre du MCU, le corps de masse m_2 subit une accélération centripète (2ème loi de Newton) dirigée vers le centre de l'objet céleste : $F = m_2 a = \frac{mv_2^2}{r_0}$. Or, dans le repère de Frenet, cette force n'est autre que la force de gravitation dirigée également vers le centre de l'objet céleste $F = \frac{GMm_2}{r_0^2}$. Donc :

$$F = \frac{mv_2^2}{r_0} = G\frac{Mm_2}{r_0^2} \Rightarrow v_2^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

3. Calculons la période :

$$v_2 = \frac{x}{t} \overset{MCU}{=} \frac{2\pi r_0}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi r_0}{v_2} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM}{r_0}}} = 2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{GM}} = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}}$$

4. L'énoncé précise que $m_1 = m$ et $m_2 = m\sqrt{2}$. Exprimons la conservation de la quantité de mouvement sachant que, avant la collision, les quantités de mouvement des corps 1 et 2, sont évidemment opposées vu qu'ils avancent en directions opposées. Et nommons V, la vitesse du système encastré après collision :

$$(m_1 + m_2)V = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Leftrightarrow \left(m + m\sqrt{2}\right)V = m\left(\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{r_0}}}\right) - \mathrm{m}\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V = 0}$$

Donc, après la collision, le système est « temporairement immobile », le temps de se remettre en mouvement, attiré par la gravitation de l'objet céleste !

5. L'énergie mécanique dissipée n'est autre que la différence d'énergie mécanique avant la collision et après la collision. Or, l'énergie potentielle avant et après collision, est la même vu que le seul paramètre influant sur l'énergie potentielle est la distance juste avant et juste après et celle-ci ne varie pas ! Il ne reste donc plus qu'à calculer la différence d'énergie cinétique :

$$E_{tot_{après}} - E_{tot_{avant}} = E_{cin_{après}} - E_{cin_{avant}}$$

$$= \frac{(m + m\sqrt{2})V^2}{2} - \left(\frac{m}{2}\left(\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{r}_0}}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}\mathrm{m}}{2}\left(\sqrt{\frac{GM}{r_0}}\right)^2\right)$$

$\overset{V=0}{=} -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}_0}$ qui est bien négatif (**<u>dissipation</u>** d'énergie !)

6. On va utiliser le principe de la conservation de l'énergie en calculant l'énergie totale au moment de la collision et, vu sa conservation, l'égaler à l'énergie totale au moment de toucher le sol ! Aussi, dès que la collision a eu lieu, la seule et unique force qui sera en jeu est la force gravitationnelle qui va faire chuter tout le système vers l'objet céleste de masse M.

Une fois la collision faite, la masse du système vaut $(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)$ et son énergie potentielle vaut $\mathrm{E}_{\mathrm{p}_{\mathrm{collision}}} = -\mathrm{GM}\cdot\frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)}{\mathrm{r}_0}$. De plus, on a calculé ci-dessus que l'énergie cinétique juste après la collision vaut $\frac{(m_1+m_2)V^2}{2}$. Donc, l'énergie TOTALE, qui d'ailleurs sera conservée tout au long de la chute vaut :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{TOT}} = \mathrm{E}_{\mathrm{Cin}} + \mathrm{E}_{\mathrm{Pot}} = \frac{(m_1 + m_2)\,V^2}{2} - \mathrm{GM}\cdot\frac{(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)}{\mathrm{r}_0}$$

Au moment de toucher le sol à la vitesse recherchée, notée V_0, on a :

- $\mathrm{E}_{\mathrm{cin}_{\mathrm{sol}}} = \frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\mathrm{V}_0^2}{2}$
- $\mathrm{E}_{\mathrm{pot}_{\mathrm{sol}}} = -(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)\frac{\mathrm{gGM}}{\mathrm{R}}$
- $\mathbf{E}_{\mathbf{TOT}} = \mathrm{E}_{\mathrm{Cin}_{\mathrm{sol}}} + \mathrm{E}_{\mathrm{Pot}_{\mathrm{sol}}} = \frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\mathrm{V}_0^2}{2} - (\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}}$

D'où :

$$\frac{(m_1 + m_2)\,V^2}{2} - \mathrm{GM}\cdot\frac{(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)}{\mathrm{r}_0} = \frac{(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)\mathrm{V}_0^2}{2} - (\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}}$$

$$\overset{V=0}{\Longleftrightarrow} -\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}_0} = \frac{\mathrm{V}_0^2}{2} - \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{V_0} = \sqrt{\frac{\mathbf{2GM}}{\mathbf{R}}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{r_0}}\right)}}$$

7. Nous avons calculé qu'après la collision, le système encastré à une vitesse nulle. Son énergie cinétique est donc nulle, à ce moment très précis. Son énergie potentielle vaut quant à elle $-\frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\mathrm{GM}}{\mathrm{r}_0}$ et donc, son énergie totale vaut aussi $\mathrm{E}_{\mathrm{tot}} = -\frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\mathrm{GM}}{\mathrm{r}_0}$

Or, à tout moment de la chute :

- $\mathrm{E}_{\mathrm{cin}}(\mathrm{t}) = \frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)\,\mathrm{v}^2(\mathrm{t})}{2} = \frac{(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2)}{2}\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}\right)^2$
- $\mathrm{E}_{\mathrm{pot}}(\mathrm{t}) = -(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}(\mathrm{t})}$

On peut donc écrire qu'à tout moment de la chute :

$$E_{tot} = E_{cin}(t) + E_{pot}(t) \Leftrightarrow \frac{(m_1+m_2)}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - (m_1+m_2)\frac{GM}{r(t)} = -\frac{(m_1+m_2)GM}{r_0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\frac{GM}{r(t)} - 2\frac{GM}{r_0} = 2GM\left(\frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Piège ! Il est évident que lorsque le temps t s'écoule, $r(t)$ diminue (suite à la chute) et donc $\frac{dr}{dt}$ est forcément négatif. Donc, en passant à la $\sqrt{\square}$ à gauche et à droite, il faut bien veiller à considérer que la partie droite de l'équation sera négative, donc :

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \Leftrightarrow dt = -\frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}$$

D'où :

$$\Delta t = \int_0^t dt = -\int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}} = -\frac{1}{\sqrt{2GM}}\int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}}$$

Heureusement … l'énoncé nous aide en conseillant une substitution : $r = r_0 \cos^2 x$.
Dans ce cas : $dr = -2r_0 \cos(x)\sin(x)\,dx$
Et aussi, quand

- $r = r_0\,;\ \ r_0 = r_0\cos^2(x) \ \Rightarrow x = \arccos(1) = 0$
- $r = R\,;\ \ R = r_0\cos^2(x) \ \Rightarrow x = \arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2GM}}\int_{r_0}^{R} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}} = \frac{2\,r_0}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_0\cos^2 x} - \frac{1}{r_0}\right)}}$$

$$= \frac{2\,r_0}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_0\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{r_0\cos^2 x}\right)}} = \frac{2\,r_0}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1-\cos^2 x}{r_0\cos^2 x}\right)}}$$

$$= \frac{2\,r_0\cdot\sqrt{r_0}}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos^2 x}\right)}} = \frac{2\,r_0\cdot\sqrt{r_0}}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \frac{\cos(x)\sin(x)\,dx}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

$$= \frac{2\,r_0\cdot\sqrt{r_0}}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}} \cos^2(x)\,dx$$

Or, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\frac{2\,\mathrm{r_0}\cdot\sqrt{\mathrm{r_0}}}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}\cos^2(x)\,dx = \frac{2\,\mathrm{r_0}\cdot\sqrt{\mathrm{r_0}}}{\sqrt{2GM}}\int_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\ dx$$

$$= \frac{2\,\mathrm{r_0}\cdot\sqrt{\mathrm{r_0}}}{\sqrt{2GM}}\left[\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}[\sin 2x\,]_0^{\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{\mathrm{r_0^3}}}{\sqrt{2GM}}\left[\frac{1}{2}\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\frac{1}{4}\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\mathrm{r_0^3}}}{\sqrt{2GM}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\frac{1}{2}\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\Delta t = \frac{\sqrt{r_0^3}}{\sqrt{2GM}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\frac{1}{2}\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\right]}}$$

On note au passage que si $\mathrm{r_0} = \mathrm{R}$, $\Delta t = 0$, ce qui est normal et … réconfortant après ce calcul !

Si vous aimez la trigonométrie, vous pouvez aller un cran plus loin, sachant que :

- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ et aussi,
- $\sin(arcos\ x) = \sqrt{1-x^2}$

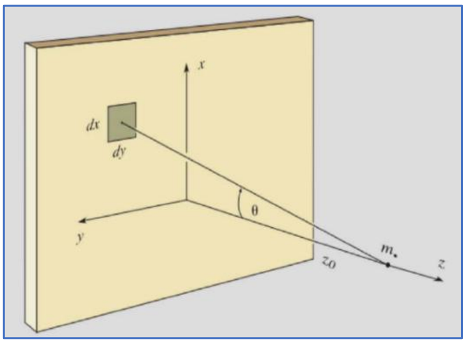
Alors : $\sin 2\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right) = 2\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right)\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}\right) = 2\sqrt{\frac{R}{r_0}}\ \sqrt{1-\frac{R}{r_0}}$

D'où :

$$\boldsymbol{\Delta t = \frac{\sqrt{r_0^3}}{\sqrt{2GM}}\left[\arccos\sqrt{\frac{R}{r_0}}+\sqrt{\frac{R}{r_0}}\ \sqrt{1-\frac{R}{r_0}}\right]}$$

Retour à l'énoncé

Solution 6 (réf 128)



Partons de la formule générale $\vec{F} = \frac{GMm_0}{r^2}\vec{r}$ où M est la masse de la plaque. Mais … la distance de m_0 à la plaque varie selon l'endroit considéré sur la plaque !

Il faut donc procéder par « petits morceaux » et ensuite intégrer !

Soit un point (x, y) sur la plaque et petit élément infinitésimal de surface $dx \cdot dy$ centré sur ce point de la plaque.

Vu que $\rho = \frac{M}{V}$, alors pour ce petit élément, on a $dm = \rho\, dV = \rho \cdot \tau \cdot dx \cdot dy$.

De plus, la distance de m_0 à (x, y) est : $\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$.

De sorte qu'au final, un petit élément de Force de gravitation dF vaut :

$$d\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{G\, dm \cdot m_0}{x^2 + y^2 + z_0^2}\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{G\, \rho \cdot \tau \cdot dx \cdot dy \cdot m_0}{x^2 + y^2 + z_0^2}\,\vec{\boldsymbol{r}}$$

Or, vu la symétrie du problème, quel que soit l'endroit où se trouve l'élément dm, il y aura un autre élément dm symétrique par rapport au point $(0,0)$ (symétrie dite centrale) qui annulera les composantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de la force ! Ne reste donc en fait QUE les composantes selon $\boldsymbol{z}$! Or comme on le voit sur la figure, $dF_z = dF \cdot cos\theta$. Donc,

$$dF_z = dF \cdot cos\theta = dF \cdot \left(\frac{z_0}{r}\right) = \frac{G\, \rho \cdot \tau \cdot dx \cdot dy \cdot m_0}{x^2 + y^2 + z_0^2} \cdot \left(\frac{z_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}}\right)$$

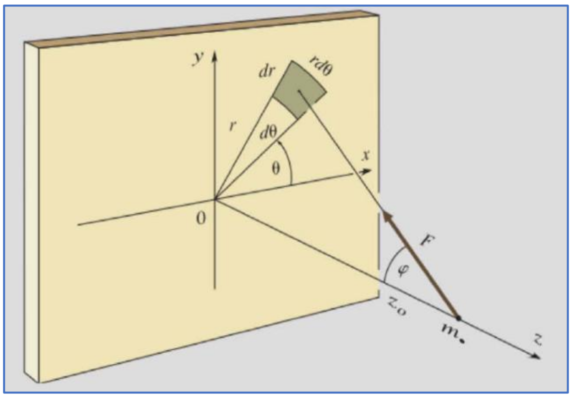
Et donc, il reste à intégrer sur toute la plaque :

$$F = F_z = G\, \rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \iint \frac{dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Qu'on demande de ne pas calculer …

Retour à l'énoncé

Solution 7 (réf 129)



On fait référence à l'exercice référence 128 (ce corrigé) où on a obtenu

$$F = G\, \rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \iint \frac{dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En coordonnées polaires, l'élément de surface n'est plus $dx \cdot dy$, mais $dr \cdot r\, d\theta$

La distance de m_0 à l'élément infinitésimal de la plaque n'est plus $\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$ mais simplement $r^2 + z_0^2$. !!Attention, le 'r' dans notre problème n'est plus la distance de m_0 à dm mais simplement la distance de $(0,0)$ à dm.

De plus, r varie de 0 à R et θ varie de 0 à 2π, afin de couvrir toute la plaque circulaire.

On a donc :

$$F = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \iint \frac{dx \cdot dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r \cdot dr \cdot d\theta}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \cdot 2\pi \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Effectuons le changement de variable :

$$u = r^2 + z_0^2 \ \Rightarrow du = d(r^2) = 2r \cdot dr \ \Rightarrow r \cdot dr = \frac{du}{2}$$

Dans ce cas, lorsque $r = 0 \ \Rightarrow u = z_0^2$ et lorsque $r = R \ \Rightarrow u = R^2 + z_0^2$
La nouvelle intégrale va donc aller de z_0^2 à $R^2 + z_0^2$.

D'où :

$$\int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{z_0^2}^{R^2+z_0^2} \frac{du}{2\,(u)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot -2\left[u^{-\frac{1}{2}}\right]_{z_0^2}^{R^2+z_0^2} = -\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} - \frac{1}{z_0}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}\right]$$

Et donc, finalement,

$$F = G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \cdot 2\pi \int_0^R \frac{r \cdot dr}{(r^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \cdot 2\pi \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}\right)}$$

Dans le cas où $R \gg z_0$, alors $\frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} \approx \frac{1}{R}$ et $\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}}\right) \approx \frac{1}{z_0}$

De sorte que si $\boldsymbol{R \gg z_0}$,

$$\boldsymbol{F} \approx G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot z_0 \cdot 2\pi \left(\frac{1}{z_0}\right) = \boldsymbol{G\,\rho \cdot \tau \cdot m_0 \cdot 2\pi}$$

Retour à l'énoncé

Solution 8 (réf 130)

a) On a d'une part : $F = -\frac{GMm}{r^2}$ et d'autre part : $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = mv\frac{dv}{dr}$
Ces deux forces étant égales on a : $-\frac{GMm}{r^2} = mv\frac{dv}{dr} \ \Leftrightarrow \ -\frac{GM}{r^2} = v\frac{dv}{dr}$

Qu'on peut réécrire : $-\frac{GM}{r^2}dr = v\,dv$

Soit v la vitesse initiale lorsque $r = R$ et v_f, la vitesse finale à une distance r quelconque. On a alors, en intégrant :

$$\int_v^{v_f} v\,dv = \int_R^r -\frac{GM}{r^2}dr \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(v_f^2 - v^2\right) = -GM\left[-\frac{1}{r}\right]_R^r = GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$$

Si la vitesse de lancement est le minimum pour atteindre r, cela veut dire qu'une fois r atteint, la vitesse en ce point v_f, est nulle ; Donc,

$$-\frac{1}{2}v^2 = GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{v = \sqrt{2\,GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}}$$

b) En d'autres termes, on demande quelle est cette vitesse minimum pour que l'objet puisse aller à l'infini, càd, $r = \infty$. Si $r = \infty$ alors, $\frac{1}{r} = 0$ et

$$\boldsymbol{v = \sqrt{\frac{2\,GM}{R}}}$$

qu'on appelle la vitesse de libération

Retour à l'énoncé

Solution 9 (réf 131)

a) On a d'une part : $F = -\frac{GMm}{r^2}$ et d'autre part : $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = mv\frac{dv}{dr}$

Ces deux forces étant égales on a : $-\frac{GMm}{r^2} = mv\frac{dv}{dr} \Leftrightarrow -\frac{GM}{r^2} = v\frac{dv}{dr}$

Qu'on peut réécrire : $-\frac{GM}{r^2}dr = v\,dv$

Soit $v_0 = 0$ la vitesse initiale lorsque $r = r_0$ et v, la vitesse à une distance r quelconque. On a alors, en intégrant :

$$\int_0^v v\,dv = \int_{r_0}^r -\frac{GM}{r^2}dr \Leftrightarrow \frac{1}{2}v^2 = -GM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^r = GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow v(r) = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}}$$

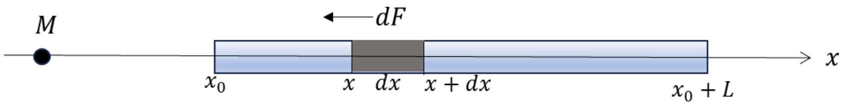
b) Si r_0 est très grand, alors $\frac{1}{r_0}$ tend vers 0 et donc $v(R_T) = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$

Mais on sait que $g_0 = \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow GM = g_0R_T^2$ et alors :

$$\boldsymbol{v(R_T)} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{R_T}} = \boldsymbol{\sqrt{2g_0R_T}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 10 (ref 132)



Il s'agit d'une simple application de $F = -\frac{GMm}{r^2}$ adapté à une tige.
L'idée est de calculer dF pour un élément de tige dx et ensuite d'intégrer sur toute la longueur de la tige. Ici,

$$dF = G\frac{M\,dm}{x^2}$$

Or, la densité linéaire de la tige vaut $\rho = \frac{m}{L}$, donc, $\rho = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \rho\, dx = \frac{m}{L}dx$. Il suit :

$$dF = G\frac{M\,dm}{x^2} = G\frac{M\,m\,dx}{L\,x^2}$$

Qu'on intègre sur la longueur, soit de x_0 à $x_0 + L$:

$$\boldsymbol{F} = \int dF = \int_{x_0}^{x_0+L} G\frac{M\,m\,dx}{L\,x^2} = \frac{GMm}{L}\int_{x_0}^{x_0+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{GMm}{L}\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_0+L} = \frac{GMm}{L}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+L}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{GMm}{x_0\,(x_0+L)}}$$

- **Si toute la masse était concentrée au milieu de la tige**, on aurait eu simplement :

$$\boldsymbol{F = \frac{GMm}{\left(x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}}$$

- Si $x_0 \gg L$, on a dans les deux cas

$$\boldsymbol{F = \frac{GMm}{{x_0}^2}}$$

Sans surprise, puisqu'à grande distance, la barre aurait été perçue comme un objet ponctuel de masse m située à une distance x_0.

Retour à l'énoncé

Solution 11 (réf 133)

On cherche comment varie g lorsqu'on s'éloigne (mais pas trop !) de la surface terrestre. On sait que $g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donne g au niveau de la surface de la Terre et $g_T(r) = \frac{GM_T}{r^2}$ donne g à une altitude $r = R_T + h$ où h est la hauteur au-dessus de la surface terrestre.

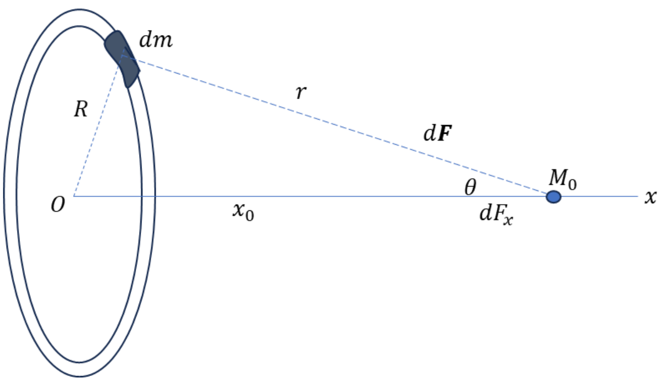
$$g_T(r) = \frac{GM_T}{r^2} \Rightarrow \frac{d}{dr} g_T(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{GM_T}{r^2}\right) = -2\frac{GM_T}{r^3}$$

Au niveau de la surface terrestre, $r = R_T$ et donc

$$\frac{d}{dr} g_T(r) = -2\frac{GM_T}{R_T^3} = -\frac{6{,}672\,59 \times 10^{-11} \cdot 5{,}975 \times 10^{24}}{(6{,}371\,23 \times 10^{6}\,)^3} = -3{,}08 \times 10^{-6}\left(\frac{m}{s^2}\right)/m$$

Retour à l'énoncé

Solution 12 (réf 134)



Note : Cet exercice est très similaire à la référence 129.
On calcule d'abord la force exercée par un élément de masse dm :

$$dF = G\frac{Mdm}{r^2} = G\frac{M\,dm}{R^2 + x_0^2}$$

Par symétrie centrale par rapport à O, on voit que tout élément dm aura un élément symétrique tel que les composantes de F selon y et z s'annulent. Il restera donc les composantes selon x.

$$dF_x = dF\cos(\theta) = dF\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{M\,dm}{R^2 + x_0^2}\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{M\,dm}{R^2 + x_0^2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}\right)$$
$$= G\frac{M\,dm\,x_0}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = \int dF_x = \int G\frac{M\,dm\,x_0}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\frac{M\,x_0}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}}\int dm = \boldsymbol{G\frac{M\,m\,x_0}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Si toute la masse de l'anneau était concentrée au centre, ce serait tout simplement

$$\boldsymbol{F} = G\frac{M\,m\,x_0}{(x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\frac{M\,m\,x_0}{x_0^3} = G\frac{M\,m}{x_0^2}$$

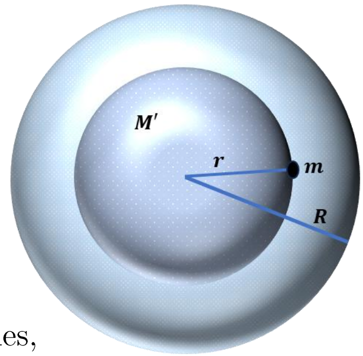
Et si $x_0 \gg R$, on aurait

$$F = G\frac{M\,m\,x_0}{(R^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{x_0 \gg R}{\approx} G\frac{M\,m\,x_0}{(x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = G\frac{M\,m\,x_0}{x_0^3} = G\frac{M\,m}{x_0^2}$$

Prévisible puisqu'à grande distance, l'anneau apparait comme un objet ponctuel, donc, dont la masse apparait concentrée au centre. Dans le calcul de départ, cela reviendrait à considérer directement que $r \approx x_0$ et que $R \approx 0$ …

Retour à l'énoncé

Solution 13 (réf 135)



a) La première chose à savoir (démontré dans ma partie théorique) est **qu'à l'intérieur d'une coquille sphérique, le champ gravitationnel ressenti par la masse $\boldsymbol{m}$ est nul**. Alors, certes, la plus grande sphère de masse M n'est pas vide et n'est pas une coquille mais … peut être considéré comme un empilement infini de coquilles, chacune très mince et donc, le résultat est le même : la masse m ne va ressentir aucun champ gravitationnel dû à ce qui se trouve à un rayon plus grand que R !

Et donc, $F_m = \frac{GM'm}{r^2}$

Or, $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow \frac{M}{R^3} = \frac{M'}{r^3} \Rightarrow M' = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$, d'où :

$$\boldsymbol{F_m} = \frac{GM'm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}M\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{Gm\,M\,r^3}{r^2\,R^3} = \frac{\boldsymbol{Gm\,M\,r}}{\boldsymbol{R^3}}$$

b) Par simple application du résultat obtenu en a), on a :

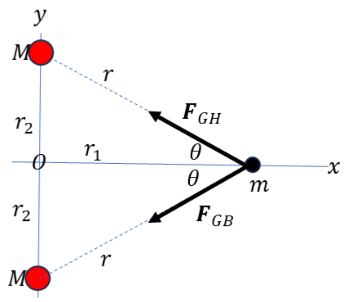
$$F\left(r = \frac{R}{2}\right) = \frac{Gm\,M\,\left(\frac{R}{2}\right)}{R^3} = \frac{GMm}{2R^2}$$

Accessoirement, $g\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{F\left(\frac{R}{2}\right)}{m} = \frac{GM}{2\,r^2}$

Retour à l'énoncé

Solution 14 (réf 136)

Soit F_{GH}, la force gravitationnelle exercée par la boule du haut et F_{GB}, la force gravitationnelle exercée par la boule du bas.



Par symétrie, on voit bien que seules les composantes selon X vont entrer en compte puisque selon Y, $(\boldsymbol{F}_{GH})_y$ et $(\boldsymbol{F}_{GH})_y$ seront opposées et vont s'annuler.

Or $(\boldsymbol{F}_{GH})_x = F_{GH}\, cos\theta = -\frac{GMm}{r^2}\cos\theta = -\frac{GMm}{r_1^2+r_2^2}\cos\theta = -\frac{GMm}{r_1^2+r_2^2}\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$ et évidemment,

même chose pour la boule du bas : $(\boldsymbol{F}_{GB})_x = -\frac{GMm}{r_1^2+r_2^2}\frac{r_1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2}}$

La contribution de la force gravitationnelle exercée par les deux boules sur la masse m est donc la somme des deux :

$$F_g = -2\frac{GMm\, r_1}{(r_1^2+r_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Note : le signe 'moins' indique simplement que la force est vers la gauche…

$$\Rightarrow F_g = -2\frac{GMm\, r_1}{(r_1^2+r_2^2)^{\frac{3}{2}}} = -2\cdot\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot 2\cdot 10\times10^{-3}\cdot 0{,}25}{\sqrt{(0{,}25^2+0{,}50^2)^3}} = -3{,}8\times10^{-12}\,N$$

Retour à l'énoncé

Solution 15 (réf 137)

L'idée est de calculer l'accélération gravitationnelle à la surface puis de calculer la force centrifuge à cette même surface. La période obtenue en égalant les deux forces est la période limite telle qu'au-dessus, la matière serait éjectée.

L'accélération gravitationnelle à la surface est donnée par la formule habituelle :

$$g_n = \frac{GM_n}{R^2}$$

Or, $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho\, V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$.

D'où, $g_n = \frac{GM_n}{R^2} = \frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\,\rho\, R$

D'autre part, la force centrifuge qui tend à éjecter une particule à la surface de l'étoile est : $F_c = ma = m\frac{v^2}{R}$. L'accélération centrifuge est $\frac{v^2}{R}$.

Et donc, égaler les deux permet de trouver quand une particule est en équilibre entre la force qui l'attire vers le centre et la force qui tend à l'éjecter.

$$\Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{4}{3}\pi G\, \rho\, R$$

Or, pour une rotation, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi R}{\tau}$. D'où :

$$\frac{v^2}{R} = \frac{4}{3}\pi G\, \rho\, R \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2\pi R}{\tau}\right)^2}{R} = \frac{4}{3}\pi G\, \rho\, R \Leftrightarrow \frac{4\,\pi^2 R^2}{R\,\tau^2} = \frac{4}{3}\pi G\, \rho\, R \Leftrightarrow \frac{\pi}{\tau^2} = \frac{G\,\rho}{3}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{3\pi}}{\boldsymbol{G\rho}}}$$

Ce qui donne numériquement, $\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{6{,}67\times10^{-11}\cdot10^{17}}} = 1 \times 10^{-3}\, s = 1ms$

Autrement dit, dès qu'une étoile à neutrons de densité $10^{17}\, kg/m^3$ tourne plus rapidement que 1000 fois par seconde, elle peut commencer à éjecter de la matière.

Retour à l'énoncé

Solution 16 (réf 138)

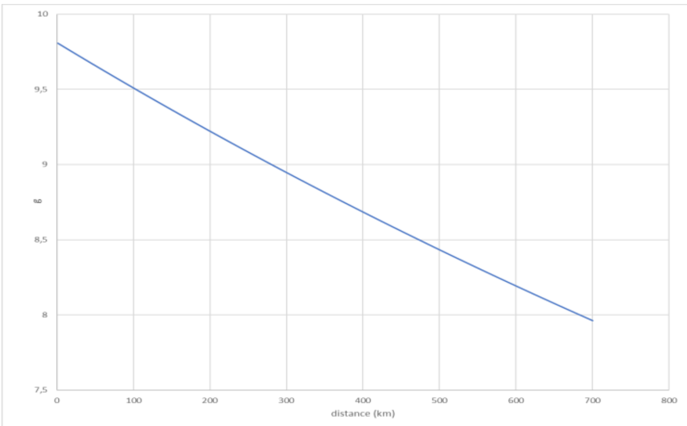
On sait que pour une masse m, le poids est donné par $F_g = mg_T$. Or, $g_T(h) = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ et $g_0 = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$ d'où :

$$F_g = mg_T = \frac{GM_T m}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T m}{\left(R_T(1+\frac{h}{R_T})\right)^2} = \frac{GM_T m}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{g_0 m}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Et donc,

$$\frac{F_g}{m} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{9{,}81}{\left(1+\frac{h}{(6370000)}\right)^2}\ m/s^2$$

Ce qui donne, avec un tableur Excel.



Dans le cas où $h \ll R_T$, h/R_T tend vers 0 et on peut appliquer un développement de Taylor à

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Pour faciliter l'écriture, on pose temporairement $\frac{h}{R_T} = x$. On veut donc développer $\frac{1}{(1+x)^2}$ en série de Taylor.

Rappel : au **premier ordre** (!) le développement de Taylor de $f(x)$ en 0 vaut :

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + f'0)\, x} \,(+\frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots)$$

Or,

- $f(x) = (1+x)^{-2} \;\Rightarrow f(0) = 1$
- $f'(x) = -2(1+x)^{-3} \;\Rightarrow f'(0) = -2$

Donc, $f(x) \approx 1 - 2x$

Revenant à $\frac{h}{R_T} = x$, on a : $\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2\frac{h}{R_T}$

Et donc, $\frac{F_g}{m} = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \overset{h \ll R_T}{\approx} \boldsymbol{g_0\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right)}$

Retour à l'énoncé

Solution 17 (réf 139)

a) On sait que $g_T(h) = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$ et $g_0 = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$ d'où :

$$g_T = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T}{\left(R_T(1+\frac{h}{R_T})\right)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2}$$

Utilisons le développement du binôme :

$$(a+x)^n = a^n + n\,a^{n-1}x + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}\,x^2 + \cdots$$

où $x^2 < a^2$. Ici, $a = 1$, $x = \frac{h}{R}$, $n = -2$.

$$g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-2} = \frac{GM_T}{R_T^2}\left[1 - \frac{2(1)h}{R} + \frac{1}{2}(-2)(-3)(1)\left(\frac{h}{R_T}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$\approx \frac{GM_T}{R_T^2}\left[1 - \frac{2h}{R} + \cdots\right]$$

Si $h = 0$, on obtient bien : $g_T = \frac{GM_T}{R_T^2} = g_0$

b)

1) En utilisant $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$, on a $g_T = \frac{GM_T}{(R_t+h)^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}975\times10^{24}}{(6{,}37123\times10^6+10000)^2} = 9{,}791\ m/s^2$

2) En utilisant l'approximation trouvée en a), on obtient :

$$g_T \approx \frac{GM_T}{R_T^2}\left[1-\frac{2h}{R}+\cdots\right] = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}975\times10^{24}}{(6{,}37123\times10^6)^2}\left[1-\frac{20000}{6{,}37123\times10^6}+\cdots\right]$$
$$= 9{,}513\ m/s^2$$

Ce qui fait une différence d'un peu moins de 3%

c) Utilisant le résultat obtenu en a), on a :

$$g_l \approx \frac{GM_l}{R_l^2}\left[1-\frac{2h}{R_l}+\cdots\right] = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot\ 7{,}35\times10^{22}}{(1{,}74\times10^6)^2}\left[1-\frac{2\cdot100}{1{,}74\times10^6}\right]$$
$$= 1{,}61906\ m/s^2$$

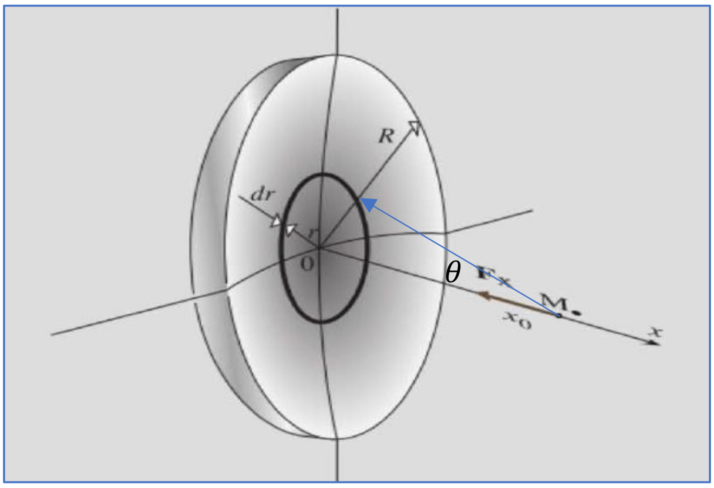
La valeur à la surface de la Lune est :

$$g_l = \frac{GM_l}{R_l^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot7{,}35\times10^{22}}{(1{,}74\times10^6)^2} = 1{,}61925\ m/s^2$$

L'écart est donc de $\frac{1{,}61925-1{,}61906}{1{,}61925} \approx 0{,}01\%$ lequel est négligeable en pratique !

Retour à l'énoncé

Solution 18 (réf 140)



Considérons un anneau situé entre le rayon r et $r + dr$.
Sa largeur est dr. Son épaisseur est Kr et sa circonférence est $2\pi r$.
De sorte que son élément de volume est :

$$dV = 2\pi r\cdot Kr\cdot dr = 2\,\pi K\,r^2\,dr$$

Soit $\rho = M/V$, alors la masse dm de l'élément d'anneau est :

$$dm = \rho\,dV = \rho\,2\,\pi K\,r^2\,dr$$

Pour des raisons de symétries, seules les composantes de $\vec{F}$ selon l'axe X vont entrer en ligne de compte. Et donc,

$$dF_x = dF\cos\theta = dF\frac{x_0}{(x_0^2+r^2)^{\frac12}} = \frac{GM\,dm}{x_0^2+r^2}\frac{x_0}{(x_0^2+r^2)^{\frac12}} = \frac{GM\,x_0\,(\rho\,2\,\pi K\,r^2\,dr)}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac32}}$$

$$\Rightarrow F = \int dF_x = \int_0^R \frac{GM\,x_0\,\rho\,2\,\pi K\,r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac32}} = 2\,GM\,x_0\,\rho\,\pi K\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac32}}$$

Concentrons-nous sur la résolution de $\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

Soit vous disposez d'une table d'intégrales ou d'un logiciel de calcul analytique, soit on y va « à l'ancienne » 😉

Sur la figure on voit que : $\frac{r}{x_0} = tan(\theta)$ $\Rightarrow$ effectuons le changement de variable :

$$r = x_0\,tan(\theta) \;\Rightarrow dr = x_0\,\frac{(sin\theta cos\theta + sin\theta sin\theta)}{cos^2\theta}\,d\theta = x_0\,\frac{1}{cos^2\theta}\,d\theta = x_0\,sec^2\,d\theta$$

L'intégrale se réécrit alors :

$$\int_0^R \frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{x_0^2\,tan^2(\theta)\,x_0\,sec^2\,d\theta}{(\,x_0^2+x_0^2\,tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

Or,

$$x_0^2 + x_0^2\,tan^2\,\theta = x_0^2\left(1+\frac{sin^2\,\theta}{cos^2\,\theta}\right) = x_0^2\left(\frac{1}{cos^2\,\theta}\right) = x_0^2\,sec^2\,\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^R \frac{x_0^2\,tan^2(\theta)\,x_0\,sec^2\,d\theta}{(\,x_0^2+x_0^2\,tan^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \int_0^R \frac{x_0^2\,tan^2(\theta)\,x_0\,sec^2\theta\,d\theta}{(\,x_0^2\,sec^2\,\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int_0^R \frac{x_0^3\,tan^2(\theta)\;sec^2\theta\,d\theta}{x_0^3\,sec^3\,\theta} = \int_0^R \frac{tan^2(\theta)\,d\theta}{sec\,\theta} = \int_0^R \frac{sin^2(\theta)\cos\theta\,d\theta}{cos^2\,\theta}$$

$$= \int_0^R \frac{sin^2(\theta)d\theta}{cos\,\theta} = \int_0^R \frac{1-cos^2(\theta)d\theta}{cos\,\theta} = \int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta - \int_0^R cos\,\theta\,d\theta$$

Or,

$$\int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta = \int_0^R \sec\theta\,d\theta = \int_0^R \sec\theta\,\frac{(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)}\,d\theta$$

Mais ... $\frac{d}{d\theta}(\sec\theta+\tan\theta) = \sec\theta\,tan\theta + \sec^2\theta = \sec\theta\,(\tan\theta+\sec\theta)$

Ce qui est exactement le numérateur !

On se retrouve donc avec une intégrale de type $\int\frac{du}{u} = \ln|u|$ avec $u = \sec\theta+\tan\theta$

Et donc, ici, on a :

$$\int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta\,|$$

Et donc,

$$\int_0^R \frac{1}{cos\,\theta}d\theta - \int_0^R cos\,\theta\,d\theta = [\ln|\sec\theta+\tan\theta\,|]_0^R - [\sin\theta]_0^R$$

On a :

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{x_0^2+r^2}}{x_0} \quad ;\ \tan\theta = \frac{r}{x_0} \quad ;\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{x_0^2+r^2}}$$

Il faut donc calculer :

$$\left[\ln\left|\frac{\sqrt{x_0^2+r^2}}{x_0}+\frac{r}{x_0}\right|\right]_0^R-\left[\frac{r}{\sqrt{x_0^2+r^2}}\right]_0^R$$
$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}+\frac{R}{x_0}\right|-(\ln(1)-0)-\left(\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right)$$
$$=\ \ln\left|\frac{R+\ \sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}\right|-\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}$$

Le terme $\frac{R+\ \sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}$ étant forcément positif, on peut supprimer la valeur absolue !

On obtient (enfin !) :

$$\int_0^R\frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\ln\left|\frac{R+\ \sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}\right|-\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}$$

Et remettant les constantes devant l'intégrale, on a :

$$\boldsymbol{F}=2\,GM\,x_0\,\rho\,\pi K\int_0^R\frac{r^2\,dr}{(\,x_0^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\ 2\,GM\,x_0\,\rho\,\pi K\left(\ln\left(\frac{R+\ \sqrt{x_0^2+R^2}}{x_0}\right)-\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right)$$

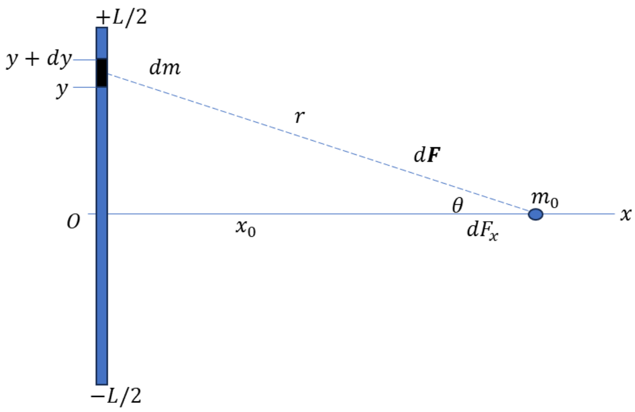
Au niveau des unités, on a :

$$[G]=\frac{N\,m^2}{kg^2}\ ;\ \ [M]=kg\ ;\ [x_0]=m\ ;\ [\rho]=\frac{kg}{m^3}\ ;\ \ [K]=constante$$

$\Rightarrow\ [F]=\frac{N\,m^2}{kg^2}\cdot kg\cdot m\cdot\frac{kg}{m^3}=\ N$. Les unités sont donc bien respectées !

Retour à l'énoncé

Solution 19 (réf 141)



a) Il s'agit d'une application de $F=-\frac{GMm_0}{r^2}$ adapté à une tige.

L'idée est de calculer dF pour un élément de tige dy et ensuite d'intégrer sur toute la longueur de la tige. Ici,

$$dF=G\frac{m_0\,dM}{r^2}$$

Avec $r^2=x_0^2+y^2$

Or, la densité linéaire de la tige vaut $\lambda=\frac{M}{L}$, donc, $\lambda=\frac{dM}{dy}\ \Rightarrow dM=\lambda\,dy=\frac{M}{L}dy$. Il suit :

$$dF = G\frac{m_0\, dM}{r^2} = G\frac{m_0 M\, dy}{L\,(x_0^2 + y^2)}$$

qu'on intègrera sur la longueur, soit de $-L/2$ à $+L/2$.

D'autre part, par symétrie miroir par rapport à O, on voit que tout élément dm aura un élément symétrique (de l'autre côté de O), tel que les composantes de F selon y s'annulent. Il restera donc les composantes selon x.

$$dF_x = dF\cos(\theta) = dF\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{m_0 M\, dy}{L\,(x_0^2+y^2)}\left(\frac{x_0}{r}\right) = G\frac{m_0 M\, dy}{L\,(x_0^2+y^2)}\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y^2}}\right)$$

$$= G\frac{m_0 M\, x_0\, dy}{L\,(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Et donc,

$$\boldsymbol{F} = \int dF = \int_{-L/2}^{L/2} G\frac{m_0 M\, x_0\, dy}{L\,(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{G m_0 M x_0}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Concentrons-nous sur $\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ dont l'astuce de résolution est un grand classique (bien que pas facile à deviner si on ne l'a pas vu auparavant …) en posant :

$$\boldsymbol{y = x_0\, tan\theta} = x_0\frac{sin\theta}{cos\theta} \Rightarrow dy = x_0\frac{cos\theta cos\theta + sin\theta sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta = x_0\frac{1}{\cos^2\theta} = x_0\sec^2\theta\ d\theta$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{x_0\, sec^2\theta\ d\theta}{(x_0^2+x_0^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{x_0\, sec^2\theta\ d\theta}{x_0^3\,(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{sec^2\theta\ d\theta}{x_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \int\frac{sec^2\theta\ d\theta}{x_0^2\,(sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x_0^2}\int\frac{sec^2\theta\ d\theta}{sec^3\theta} = \frac{1}{x_0^2}\int\frac{1\, d\theta}{sec\ \theta}$$

$$= \frac{1}{x_0^2}\int cos\theta\ d\theta = \frac{1}{x_0^2}\ sin\theta$$

Or, on voit sur la figure que $r\ sin\theta = y\ \Rightarrow sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{(x_0^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow \int_{-L/2}^{L/2}\frac{dy}{(x_0^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x_0^2}\left[\frac{y}{(x_0^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{x_0^2}\left(\frac{L}{\left(x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{L}{x_0^2\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Remettant les constantes $\frac{G m_0 M x_0}{L}$ devant l'intégrale, on obtient finalement :

$$\boldsymbol{F} = \frac{G m_0 M x_0}{L}\cdot\frac{L}{x_0^2\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \boldsymbol{\frac{G m_0 M}{x_0\sqrt{x_0^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}}$$

b) Utilisons (comme suggéré dans l'énoncé) $\lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow M = \lambda\, L$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = \frac{Gm_0M}{x_0\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \frac{Gm_0\lambda L}{x_0\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Faisons tendre L vers l'infini.

$$\lim_{L\to\infty} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{L}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{L}{\frac{L}{2}} = 2$$

D'où, lorsque $\boldsymbol{L} \longrightarrow \infty$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{2\, Gm_0\lambda}}{\boldsymbol{x_0}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 20 (réf 142)

Appelons m_A, la masse de Sirius A et m_B, la masse de Sirius B. Les deux étoiles orbitent autour de leur barycentre O avec r_A, la distance de Sirius A à O et r_B, la distance de Sirius B à O.

a) Considérons d'abord les forces sur m_A . Alors :

$$F_A = \frac{Gm_Am_B}{(r_A + r_B)^2}$$

Et comme m_A tourne autour de O: $F_{cA} = \frac{m_Av_A^2}{r_A} = \frac{m_A}{r_A}\left(\frac{2\pi r_A}{T_A}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_A r_A}{T_A^2}$

Considérons ensuite les forces sur m_B . Alors :

$$F_B = \frac{Gm_Am_B}{(r_A + r_B)^2}$$

Et comme m_B tourne autour de O: $F_{cB} = \frac{m_Bv_B^2}{r_B} = \frac{m_B}{r_B}\left(\frac{2\pi r_B}{T_B}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_B r_B}{T_B^2}$

On voit que $F_A = F_B$, or $F_A = F_{CA}$ et $F_B = F_{CB}$ donc $F_{CA} = F_{CB}$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 m_A r_A}{T_A^2} = \frac{4\pi^2 m_B r_B}{T_B^2} \overset{T_A = T_B}{\Longleftrightarrow} m_Ar_A = m_Br_B \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{r_A}}{\boldsymbol{r_B}} = \frac{\boldsymbol{m_B}}{\boldsymbol{m_A}}$$

L'énoncé précise que $r_B = 2\, r_A$, donc $\frac{r_A}{2\, r_A} = \frac{m_B}{m_A} \Rightarrow m_B = 2\, m_A$

b) Comme $F_A = F_{cA}$: $\frac{Gm_Am_B}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 m_A r_A}{T_A^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_B}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 r_A}{T_A^2}$ (1)

De même : $F_B = F_{CB}$: $\frac{Gm_Am_B}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 m_B r_B}{T_B^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_A}{(r_A+r_B)^2} = \frac{4\pi^2 r_B}{T_B^2}$ (2)

Sommons membre à membre (1) et (2) :

$$\frac{Gm_B}{(r_A+r_B)^2}+\frac{Gm_A}{(r_A+r_B)^2}=\frac{4\pi^2 r_A}{T_A^2}+\frac{4\pi^2 r_B}{T_B^2}$$

$$\overset{T_A=T_B=T}{\Longleftrightarrow}\ \frac{Gm_B}{(r_A+r_B)^2}+\frac{Gm_A}{(r_A+r_B)^2}=\frac{4\pi^2 r_A}{T^2}+\frac{4\pi^2 r_B}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G\,(m_A+m_B)}{(r_A+r_B)^2}=\frac{4\pi^2(r_A+r_B)}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{(r_A+r_B)^3}{T^2}=\frac{G(m_A+m_B)}{4\,\pi^2}}$$

D'où $m_A+m_B=\frac{4\,\pi^2\,(r_A+r_B)^3}{G\,T^2}=\frac{4\,\pi^2\,(2{,}99\times10^{12})^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot\,(50\cdot365\cdot24\cdot3600)^2}=6{,}34\times10^{30}\,kg$

Or, (a) : $m_B=2\,m_A\ \Rightarrow 3\,m_A=6{,}34\times10^{34}\,kg\ \Rightarrow m_A=2{,}1\times10^{30}\,kg$
Et donc $m_B=2\,m_A=4{,}2\times10^{30}kg$

Retour à l'énoncé

Solution 21 (réf 143)

D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g=G\frac{M_T M_s}{r_s^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c=M_s\cdot\frac{v^2}{r_s}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_s}{r_s^2}=M_s\cdot\frac{v^2}{r_s}\ \Rightarrow G\frac{M_T}{r_s}=v^2$$

Or, $v=\frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_{tl}$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche
Et donc, $v=\frac{x}{t}=\frac{2\pi r_T}{\tau}\ \Rightarrow v^2=\frac{4\,\pi^2 r_s^2}{\tau^2}\Rightarrow v=\frac{2\pi r_s}{\tau}=\frac{2\pi r_{tl}}{\tau\,2}=\frac{\pi r_{tl}}{\tau}$ (nous y reviendrons)

Donc, $G\frac{M_T}{r_s}=v^2\ \Leftrightarrow\ G\frac{M_T}{r_s}=\frac{4\,\pi^2 r_s^2}{\tau^2}\ \Rightarrow \tau^2=\frac{4\,\pi^2 r_s^3}{G\,M_T}\ \Rightarrow \boldsymbol{\tau}=2\,\pi\sqrt{\frac{r_s^3}{G\,M_T}}=2\frac{\pi}{G\,M_T}\sqrt{r_s^3}$

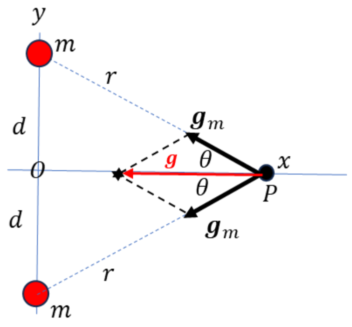
$$=\frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\ \cdot\ 5{,}975\times10^{24}}}\sqrt{\left(\frac{r_{tl}}{2}\right)^3}=3{,}15\times10^{-7}\sqrt{\left(\frac{3{,}844\times10^8}{2}\right)^3}\ \ secondes$$

$=839334\ s=9{,}71\ jours$

Revenant sur $v = \frac{\pi r_{tl}}{\tau}$, on a $v = \frac{\pi \ 3{,}844\times10^8}{839334} = 1438 \, m/s$

Retour à l'énoncé

Solution 22 (réf 144)



Vu la symétrie de la position des masses de part et d'autre de O, les composantes de g selon l'axe Y s'annulent (la composante selon Y de l'une des masses annule celle créée par l'autre masse).
Restent donc les composantes selon l'axe X, dirigées dans le même sens (voir figure).
De manière générale, $g_m = \frac{Gm}{r^2}$.
Ici, $g = 2\, g_m \cos\theta$ (le '2' car chacune des 2 masses apporte sa contribution).
D'où,

$$g = 2\, g_m \cos\theta = 2\, \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{2\,G\,m\,x}{r^3} = \frac{2\,G\,m\,x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 23 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 24 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 25 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 26 (ref)

Retour à l'énoncé

Solution 27 (réf)

.

Retour à l'énoncé

Solution 28 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 29 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 30 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 31 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 32 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 33 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 34 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 35 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 36 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 37 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 38 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 39 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 40 (réf)

Retour à l'énoncé

Solution 41 (ref)

Retour à l'énoncé

Solution 42 (ref)

Retour à l'énoncé

Solution 43 (ref)

Retour à l'énoncé