EXERCICES DE MECANIQUE

Gravitation et Lois de Kepler

Entièrement rédigé et corrigé par Laurent HARDY

Gravitation et Lois de Kepler

Exercice 1 (réf 42)

Lors de sa révolution, Uranus passe au plus près du Soleil à une distance de $2{,}74 \times 10^{12}\ m$ et au plus loin à une distance de $3{,}00 \times 10^{12}\ m$.

Caractériser la nature de l'orbite d'Uranus.

Solution

Exercice 2 (réf 43)

Avec la mission Proxima, Thomas Pesquet est le dixième Français à s'être rendu à bord de la Station spatiale internationale (ISS), située à une altitude h considérée constante et voisine de 400 km.

1. Schématiser la trajectoire de l'ISS en orbite autour de la Terre en indiquant le rayon terrestre et l'altitude h.

2. Après avoir représenté la force $\vec{F}_{T/ISS}$ exercée par la Terre sur l'ISS, donner l'expression littérale de cette force en précisant les unités de chaque grandeur.

Solution

Exercice 3 (réf 44)

Cérès se situe dans la ceinture principale d'astéroïdes. Depuis 2008, elle est classée comme une planète naine, intermédiaire entre un astéroïde et une planète.

D'après la première loi de Kepler, préciser comment se déplace la planète naine Cérès par rapport au Soleil.

Solution

Exercice 4 (réf 45)

1. Rappeler les caractéristiques d'un mouvement circulaire uniforme.
2. Exprimer la vitesse orbitale v d'un satellite en fonction du rayon r de son orbite et de sa période de révolution T.
3. En déduire l'évolution de v si r est divisé par 4.

Solution

Exercice 5 (réf 46)

Phobos et Déimos décrivent une trajectoire circulaire autour de Mars. Phobos se déplace suivant une orbite de rayon $r_p = 9{,}38 \times 10^3\ km$ avec une période de révolution $T_P = 0{,}32\ j$. La période de Déimos est de $T_D = 1{,}26\ j$.

1. Énoncer la troisième loi de Kepler.
2. En déduire le rayon r_D de l'orbite de Déimos.

Solution

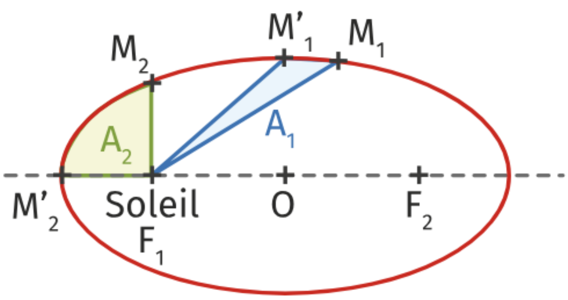
Exercice 6 (réf 47)

Dans le cas d'une orbite circulaire, préciser la relation entre la valeur de la vitesse et celle de l'accélération.

Solution

Exercice 7 (réf 48)

On s'intéresse à l'astéroïde Rhea Sylvia décrivant une orbite elliptique autour du Soleil selon le schéma ci-contre.



1. Justifier la position du Soleil indiquée sur le schéma ci-dessus en citant la loi de Kepler utilisée.
2. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M_1' puis M_2 et M_2' sont égales. En utilisant une des lois de Kepler, donner la relation existant entre les aires A_1 et A_2.

Solution

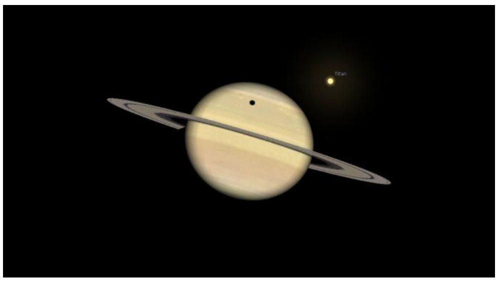
Exercice 8 (réf 49)

La comète de Encke est la seconde comète périodique découverte en 1786 après celle de Halley. Elle possède une période de révolution $T_H = 3{,}3$ a. Tout comme les autres objets célestes du système solaire, elle gravite autour du Soleil selon une orbite elliptique.

1. Schématiser la trajectoire de la comète autour du Soleil, sans souci d'échelle, en indiquant la position du périhélie P (point le plus proche) et de l'aphélie A (point le plus éloigné).
2. Illustrer la loi des aires sur le schéma précédent.
3. Préciser comment évolue la vitesse de la comète.

Solution

Exercice 9 (réf 50)



Lors de sa mission d'exploration, la sonde européenne Cassini-Huygens a livré les premiers clichés de Saturne, noté S, de ses anneaux et de ses nombreux satellites, dont Titan, noté T, le plus grand, de masse M. On considérera que son centre décrit une trajectoire circulaire autour de Saturne.

1. Représenter qualitativement sur un schéma Saturne, Titan et la force de gravitation appliquée sur Titan.

2. Donner l'expression vectorielle de cette force.

3. Exprimer l'accélération vectorielle de Titan en précisant la loi utilisée. Préciser ses caractéristiques.

4. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

5. Montrer que l'expression de la vitesse orbitale de Titan autour de Saturne est

$$v_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r_T}}$$

Calculer sa valeur.

Données :

Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
Rayon de l'orbite de Titan : $r_T = 1{,}22 \times 10^6\ km$
Rayon de Saturne : $R_S = 5{,}8 \times 10^4\ km$
Masse de Saturne : $M_S = 5{,}69 \times 10^{26}\ kg$

Solution

Exercice 10 (réf 89)

Que deviendrait le poids d'un objet, si sa masse était doublée et sa distance au centre de la Terre était aussi doublée ?

Solution

Exercice 11 (réf 90)

L'attraction gravitationnelle entre un boulet de canon de 20 kg et une bille est de $1{,}48 \times 10^{-10} N$, lorsque leurs centres sont distants de 30 cm. Calculer la masse de la bille.

Solution

Exercice 12 (réf 91)

Supposons que deux petites sphères identiques, dont les centres sont distants de 1,00 m, éprouvent une force de gravitation mutuelle de 1,00 N. Calculer la masse de chacune des sphères.

Solution

Exercice 13 (réf 92)

À quelle distance du centre de la Terre une masse de 1,0 kg pèse-t-elle 1,0 N ?
Note : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$

Solution

Exercice 14 (réf 51)

La Station spatiale internationale est occupée en permanence depuis sa mise en place en 1998. Elle est consacrée à la recherche scientifique dans l'environnement spatial. Elle se déplace à une altitude moyenne de 400 km au-dessus de la surface de la Terre.

1. Calculer la distance parcourue par la station au cours d'une seule révolution autour de la Terre.
2. En déduire la période de révolution de la station si sa vitesse moyenne est environ $V_{ISS} = 27600\ km\ h^{-1}$

Donnée :
Rayon de la Terre : $R_T = 6370\ km$

Solution

Exercice 15 (ref 93)

Supposons que la Terre est comprimée jusqu'à réduire de moitié son diamètre. Que devient l'accélération de pesanteur à sa surface ?

Solution

Exercice 16 (ref 94)

Comparer l'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur la Lune à celle du Soleil sur la Lune. On donne :

$$M_S = 1{,}987\ 10^{30} kg\ ;\ M_T = 5{,}975\ 10^{24} kg\ ;\ M_L = 7{,}35\ 10^{22} kg;$$
$$r_{ST} = 1{,}495\ 10^{11}\ m\ ; r_{TL} = 3{,}844\ 10^{8}\ m$$

Solution

Exercice 17 (ref 95)

Sachant que la distance moyenne entre Uranus et Neptune est $4{,}9\ 10^9\ km$ et que $M_U = 14{,}6\ M_T$ tandis que $M_N = 17{,}3\ M_T$, calculer leur interaction gravitationnelle moyenne. Si nécessaire, $M_T = 5{,}975\ 10^{24} kg$.

Solution

Exercice 18 (ref 96)

Considérons deux sphères homogènes de rayon R et de densité ρ, au contact l'une de l'autre. Écrire l'expression de leur interaction gravitationnelle mutuelle en fonction de R, ρ et G. On fera l'approximation (en réalité inexacte) que cette interaction est équivalente à celle de deux masses ponctuelles égales à celles des sphères.

Solution

Exercice 19 (ref 97)

Si vous pouvez sauter 1,00 m en hauteur sur la Terre, quelle hauteur sauteriez-vous sur Vénus, où $g_V = 0{,}88\ g_T$ en supposant la même vitesse initiale ?

Solution

Exercice 20 (ref 98)

Une fusée règle la poussée de ses moteurs de façon à rester immobile par rapport à la planète, à une altitude de 4 R_T. À quelle fraction de votre poids terrestre est égal votre poids dans la fusée.

Solution

Exercice 21 (ref 99)

On considère deux particules subatomiques, un électron et un proton, dont les masses respectives sont $9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$ et $1{,}7 \times 10^{-27}\ kg$. Lorsqu'elles sont distantes de $5{,}3 \times 10^{-11}\ m$, comme dans u atome d'hydrogène, elles s'attirent avec une force électrique

(F_E) de $8{,}2 \times 10^{-8}\,N$. Comparez cette force avec l'interaction gravitationnelle correspondante (F_G). De combien F_E est-elle supérieure à F_G.

Solution

Exercice 22 (ref 100)

Montrez que, si $r = R_T$, alors $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ est équivalent à $g_T = \frac{GM_T}{r^2}$ où g_0 est l'accélération gravitationnelle absolue à la surface de la Terre et g_T est l'accélération gravitationnelle d'une particule extérieure à la surface de la Terre, en fonction de r.

Solution

Exercice 23 (ref 101)

L'accélération de la pesanteur sur la surface de Mars est $3{,}7\,m/s^2$. Sachant que le diamètre de cette planète est $6{,}8 \times 10^6\,m$, déterminez la masse de la planète et comparez-la avec celle de la Terre.
Note : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}$ kg

Solution

Exercice 24 (ref 108)

Quelle est l'accélération due à l'attraction gravitationnelle de la Lune, exercée sur un corps à la surface de la Terre ?
On donne :
Masse de la Lune : $m_L = 7{,}35 \times 10^{22} kg$
Distance Terre-Lune = $r_{TL} = 3{,}844 \times 10^8 m$

Solution

Exercice 25 (ref 109)

Quelle est l'intensité du champ gravitationnel à 1,00 m d'une petite sphère de masse 1,00 kg ?

Solution

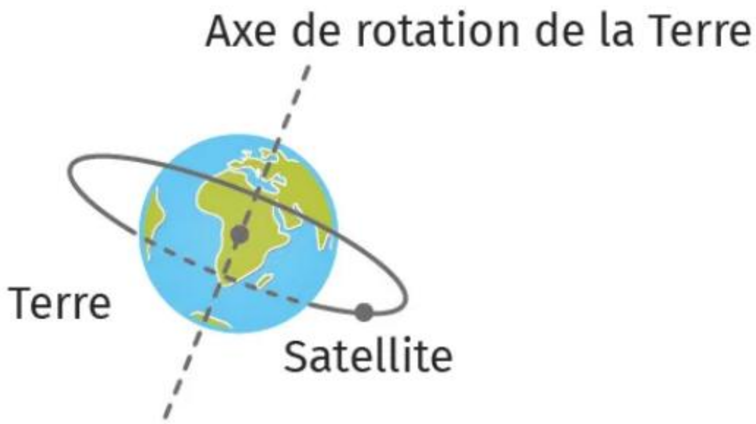
Exercice 26 (ref 110)

Quelle est l'intensité du champ gravitationnel produit par le Soleil sur la surface de la Terre ?
Masse du Soleil : $m_S = 1{,}987 \times 10^{30} kg$
Distance Terre-Soleil = $r_{TS} = 1{,}495 \times 10^{11} m$

Solution

Exercice 27 (réf 52)

Le satellite Alphasat a été mis en orbite géostationnaire par la société Arianespace depuis Kourou en 2013. Il a pour but d'assurer des missions de télécommunications. Il se déplace suivant une trajectoire supposée circulaire de rayon r et possède une masse m.



1. Expliquer ce qu'est un satellite géostationnaire.
2. Préciser le référentiel le plus adapté pour étudier le mouvement du satellite, assimilé à un point ponctuel S.
3. Dans le repère de Frenet, retrouver l'expression du vecteur accélération $\overrightarrow{a_S}$ de S tel que sa valeur est égale à $a_S = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$.

Solution

Exercice 28 (réf 53)

Les surveillances de la prévision à court terme et de l'évolution du climat sont notamment assurées par les satellites météorologiques NOAA et Meteosat. On suppose qu'ils gravitent autour de la Terre en orbite circulaire avec une période de révolution d'environ $1\,440\ min$ pour Meteosat et $100\ min$ pour NOAA.

1. Rappeler la propriété principale d'un satellite géostationnaire.
2. Rappeler la période moyenne de rotation de la Terre.
3. En déduire lequel des deux satellites peut être considéré comme géostationnaire.

Solution

Exercice 29 (réf 102)

Utilisant les données relatives à l'orbite terrestre, calculez la masse du Soleil.
On donne :

- $r_{TS} = distance\ Terre - Soleil = 1{,}495 \times 10^{11} m$
- $T = temps\ de\ révolution\ de\ la\ Terre\ autour\ du\ Soleil = 365{,}25\ jours$

Solution

Exercice 30 (réf 103)

Déterminer la valeur approximative de la vitesse d'un satellite de la Lune sur une orbite circulaire à une altitude de 62 km, sachant que le rayon de la Lune est 1738 km.
On donne la masse de la Lune : $m_L = 7{,}35 \times 10^{22} kg$

Solution

Exercice 31 (réf 104)

Chacun des modules lunaires Apollo était sur une orbite très basse autour de la Lune. Déterminer la période orbitale sachant que la masse du module était $14{,}7 \times 10^3 kg$ et que son altitude était de 60,0 km.
On donne la masse de la Lune : $m_L = 7{,}35 \times 10^{22} kg$
et le rayon de la Lune : $1{,}74 \times 10^6\ m$.

Solution

Exercice 32 (réf 105)

Montrer que la période (en secondes) d'un satellite de la Terre sur une orbite circulaire , et sa distance au centre de la planète (en mètres) sont liées par la relation :

$$T = 3{,}15 \times 10^{-7}\,(r_T)^{\frac{3}{2}}$$

On donne la masse de la Terre : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24} kg$

Solution

Exercice 33 (réf 106)

Spoutnik I, le premier satellite artificiel autour de la Terre (octobre 1957) avait un rayon orbital moyen de 6950 km.
Calculer sa période.
On donne la masse de la Terre : $M_T = 5{,}975 \times 10^{24} kg$

Solution

Exercice 34 (réf 107)

Un satellite doit passer d'une orbite circulaire à une autre de rayon deux fois plus grand.
Comment sa période est-elle modifiée ?
Comparez les deux vitesses orbitales v_1 et v_2.

Solution

Exercice 35 (réf 54)

Eris est considérée, de même que Pluton, comme une planète naine. Son orbite autour du Soleil est fortement elliptique. Sa période de révolution en année terrestre est $T_E = 557\ a$ et $T_P = 248\ a$ pour Pluton.

1. Énoncer la troisième loi de Kepler.
2. En déduire si le demi-grand axe de la trajectoire du centre d'Eris est plus grand que celui de Pluton.
Justifier

Solution

Exercice 36 (réf 55)

Avec Io, Callisto fait partie des satellites naturels de Jupiter que Galilée a observés en 1610. Io gravite autour de Jupiter à une distance $r_{I_0} = 4{,}0 \times 10^5\ km$ avec une période de révolution $T_{I_0} = 1{,}5\ j$.

Déterminer la période de révolution de Callisto sachant qu'elle est 4,5 fois plus éloignée de Jupiter que Io.

Solution

Exercice 37 (réf 56)

En 2015, la sonde spatiale *Dawn* s'est mise en orbite quasi circulaire autour de la planète naine Cérès. *Dawn* a alors effectué ses révolutions autour de Cérès, de rayon $R = 470\ km$ à une altitude moyenne $h = 13\,500\ km$ en $15\ j$. On rappelle la 3e loi de Kepler pour un mouvement circulaire uniforme :

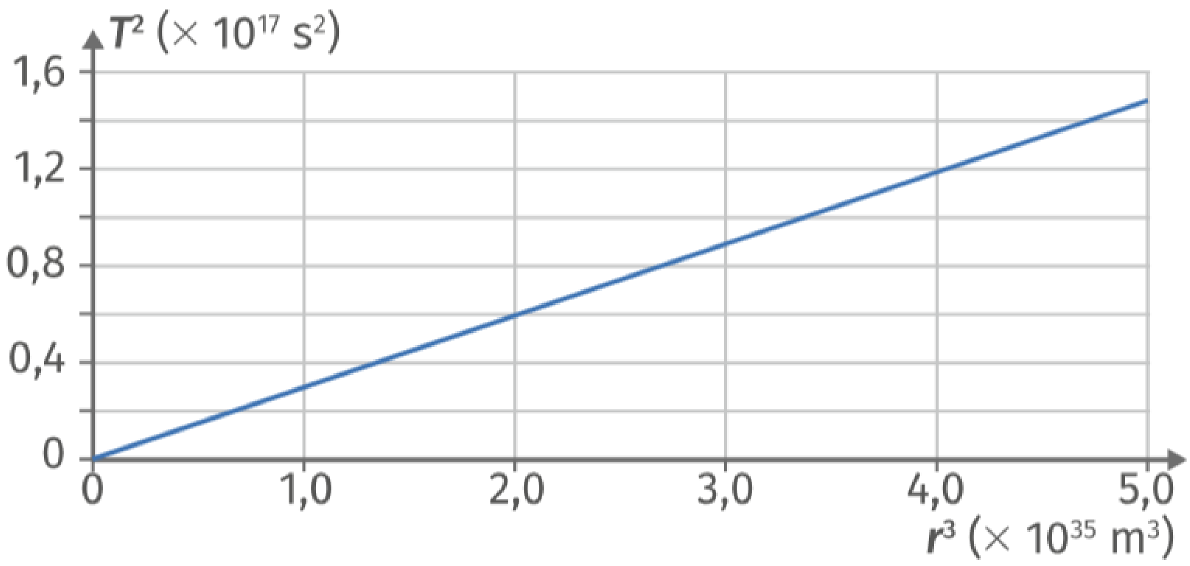
$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_C}$$

T : période de révolution de Dawn (s)
r : rayon de l'orbite de Dawn (m)
G : constante de gravitation universelle égale à $G = 6{,}67 \times 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-2} \cdot s^{-2}$
M_C : masse de Cérès (kg)

Déterminer la masse de Cérès.

Solution

Exercice 38 (réf 57)



Hermione est un astéroïde qui gravite autour de son astre attracteur à une distance r_H $= 3{,}45\ u.a.$ avec une période de révolution de $6{,}398\ a$.

Donnée : $1\ u.a. = 1{,}5 \times 10^8\ km$

1. Le graphe ci-dessus représente $T^2 = f(R^3)$ pour une planète quelconque du système solaire. Montrer que $\frac{T^2}{R^3} = 3{,}0 \times 10^{-19}\ s^2 \cdot m^{-3}$ à l'aide du graphe ci-dessus.

2. Se basant sur les données de l'énoncé, déterminer le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ de l'astéroïde Hermione.

3. En déduire si Hermione gravite autour du Soleil.

Solution

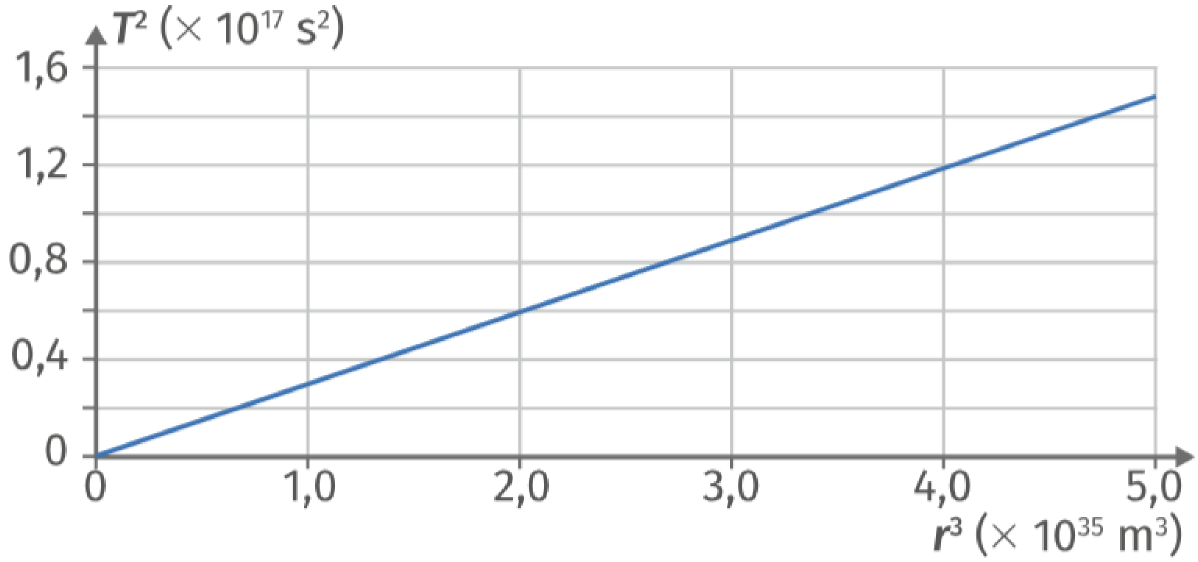
Exercice 39 (réf 58)

L'astéroïde Toutatis est considéré comme un géocroiseur, car son orbite est régulièrement proche de celle de la Terre. Sa distance moyenne au Soleil est égale à $2{,}52\ u.a.$ pour une période de révolution de $4{,}01\ a$.

1. Comparer le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ du géocroiseur Toutatis avec le coefficient directeur de la droite $T^2 = f(R^3)$ du graphe ci-dessous.

2. En déduire si Toutatis fait partie du système solaire.

Rappel : $1\ u.a. = 1{,}5 \times 10^8\ km$



Solution

Exercice 40 (réf 59)

Près de 80 satellites connus gravitent autour de Jupiter.

Retrouver l'intrus qui s'est glissé dans la liste suivante :

Satellite	Période $T(j)$	Rayon de l'orbite $r(km)$
Io	1,8	$4{,}22 \times 10^5$
Europe	3,6	$6{,}71 \times 10^5$
Triton	5,9	$3{,}55 \times 10^5$
Callisto	16,7	$1{,}88 \times 10^6$

Solution

Exercice 41 (réf 60)

Voyager 2 (NASA) est l'unique sonde à avoir survolé la planète Neptune en 1989. Cette dernière possède au moins 14 satellites, dont Triton, Néréide et Larissa. Triton orbite de manière circulaire autour de Neptune à une distance $r_{Tri} = 3{,}547 \times 10^5\ km$. Néréide possède une trajectoire très elliptique de demi-grand axe a_{Ner}=$5\ 513 \times 10^3$ km.

1. Montrer que le mouvement de Triton est uniforme tel que l'expression de la vitesse orbitale est $v_{Tri} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Nep}}{r_{Tri}}}$ et calculer la valeur de la vitesse orbitale de Triton.

2. Énoncer la 3e loi de Kepler pour les satellites de Neptune. Calculer la valeur de la période de révolution de Néréide.

Données
- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Masse de Neptune :** $M_{Nep} = 1{,}025 \times 10^{26}\ kg$
- **Masse de Triton :** $M_{Tri} = 2{,}15 \times 10^{22}\ kg$
- **Masse de Néréide :** $M_{Ner} = 3{,}1 \times 10^{19}\ kg$
- **Période de révolution de Triton :** $T_{Tri} = 5\ j\ 21\ h$

Solution

Exercice 42 (réf 61)

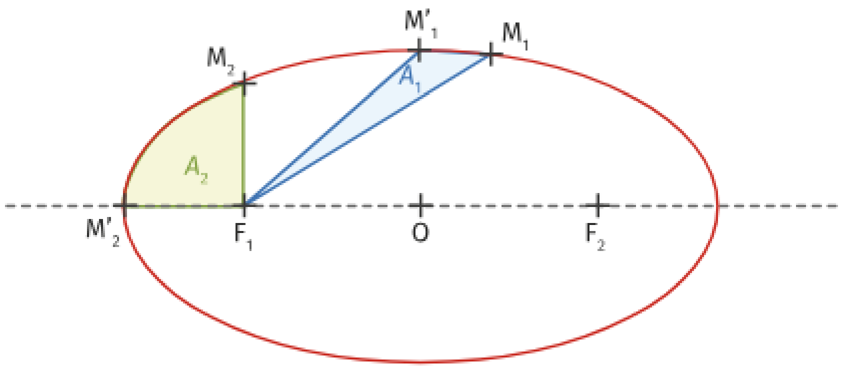
Similaire au système américain GPS, Galileo est un système de positionnement. Il permet d'obtenir sa position à l'aide d'une trentaine de satellites. En utilisant la 2e loi de Newton, on montre que la vitesse du satellite d'altitude h est égale à :
$v^2 = G \cdot \frac{M_T}{R_T+h}$

1. Rappeler la définition de la période de révolution.
2. Donner la relation qui lie la vitesse d'un satellite à sa période de révolution T.
3. En déduire l'expression de la période T en fonction de G, M_T, R_T et h.

Solution

Exercice 43 (réf 62)

La trajectoire d'une comète est tracée ci-dessous dans le référentiel héliocentrique. On suppose que les durées de parcours entre les points M_1 et M_1' puis entre M_2 et M_2' sont égales. La comète est soumise à l'attraction gravitationnelle du Soleil. Toute autre action est négligée.



1. Après avoir identifié la forme de la trajectoire, préciser ce que représentent les points $F_1, F_2,$ et O.
2. Déterminer sur quel parcours entre $M_1M_1{}'$ ou $M_2M_2{}'$ la vitesse de la comète est la plus importante.
   Expliquer.
3. Représenter la force d'interaction gravitationnelle exercée sur la comète sur un point de la trajectoire.

Solution

Exercice 44 (réf 63)

La planète Saturne est reconnaissable par ses anneaux. On suppose que chaque constituant gravite avec un mouvement uniforme où seule l'action exercée par Saturne est prise en compte.

1. Montrer que la vitesse d'un élément de l'anneau est donnée par : $v^2 = \frac{G \cdot M_S}{r}$
2. Pour deux éléments d'éloignements distincts, préciser lequel est le plus rapide.

Solution

Exercice 45 (réf 64)

Le premier vol habité de l'histoire a été effectué le 12 avril 1961 depuis le cosmodrome de Baïkonour avec à son bord le cosmonaute Youri Gagarine.
La trajectoire du module est modélisée suivant une orbite circulaire d'altitude moyenne $h = 225\ km$.

1. Préciser la condition pour qu'un mouvement soit uniforme.

2. Établir le bilan des forces exercées sur le module.

3. Montrer que l'expression de la vitesse orbitale du module est égale à : $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$

4. Calculer la valeur de la vitesse du module.

5. En déduire la période de révolution du module.

Données

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Rayon de la Terre :** $R_T = 6\ 370\ km$
- **Masse de la Terre :** $M_T = 5{,}97\ 10^{24}\ kg$

Solution

Exercice 46 (réf 65)

Nommé en l'honneur d'Edwin Hubble (1889-1953), le télescope spatial *Hubble* (HST) décrit une orbite circulaire de 42 000 km de circonférence. Cette position dans l'espace permet au télescope d'effectuer des observations sans les contraintes dues à l'atmosphère terrestre.

1. Indiquer dans quel référentiel est décrite la trajectoire du télescope.

2. Nommer les forces qui s'exercent sur le HST. Indiquer celles que l'on peut négliger en justifiant la réponse.

Solution

Exercice 47 (réf 66)

Le niveau moyen global des océans est un indicateur majeur du réchauffement climatique. L'altimétrie satellitaire est une méthode de mesure importante, car elle permet d'assurer un suivi mondial précis et continu depuis 1993. Depuis son lancement en 2013, le satellite franco-indien SARAL assure toujours cette mission.

1. Préciser le nom du référentiel galiléen dans lequel le mouvement du satellite peut être étudié.

2. En supposant une orbite circulaire, schématiser la trajectoire sans souci d'échelle.

3. En déduire la nature du mouvement d'après la deuxième loi de Kepler.

4. Dans le cas de SARAL, préciser la direction prise par son vecteur accélération. Représenter le vecteur $\overrightarrow{a_S}$ sur le schéma.

5. Montrer que le vecteur vitesse de SARAL a pour valeur : $v_S = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$

6. Calculer l'altitude h du satellite SARAL à l'aide des données.

7. Préciser en le justifiant si SARAL est géostationnaire.

Données :

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Masse du satellite SARAL :** $m_S = 400\, kg$
- **Vitesse orbitale de SARAL :** $v_S = 7{,}47\, km \cdot s^{-1}$
- **Période de rotation de la Terre :** $T_T = 23{,}93\, h$
- **Rayon de la Terre :** $R_T = 6\,370\, km$
- **Masse de la Terre :** $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\, kg$
  - **Expression du vecteur accélération dans le cas d'un mouvement circulaire :**

$$\vec{a} \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{r} \end{pmatrix}_{(G,\vec{T},\vec{N})}$$

Solution

Exercice 48 (réf 67)

Le suivi de la mesure de la température de l'océan est important, car la température influe sur le transport océanique et le climat mondial. En plus des mesures in-situ (bouées, bateaux), les satellites à défilement comme *MetOp* et *NOAA* ou géostationnaires comme *GOES* et *Meteosat* permettent de réaliser des mesures sur une grande surface terrestre dans l'infrarouge.

On considère les satellites comme ponctuels et soumis à la seule interaction gravitationnelle terrestre. Leur mouvement est décrit dans le référentiel géocentrique suivant une orbite supposée circulaire de rayon r.

1. Expliquer la différence possible entre un satellite géostationnaire et un satellite à défilement.

2. Représenter sans souci d'échelle la Terre, un satellite et sa trajectoire.
3. Préciser l'hypothèse adoptée si on représente la Terre par un point O correspondant à son centre de masse.
4. Donner l'expression de la 3e loi de Kepler. Montrer qu'elle est cohérente avec la formule :

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$$

Le tableau ci-dessous regroupe les périodes T de révolution et les rayons r de la trajectoire des différents satellites utilisés pour créer les cartes de températures.

Satellite	Rayon de l'orbite r (km)	Période T (s)
Goes 17	$4{,}22 \times 10^4$	$8{,}62 \times 10^4$
Meteosat	$42{,}1 \times 10^3$	$8{,}58 \times 10^4$
Noaa 20	$7{,}19 \times 10^3$	$6{,}08 \times 10^3$
Jason 3	$7{,}70 \times 10^3$	$6{,}74 \times 10^3$

5. Expliquer en quoi ces mesures permettent de confirmer la 3e loi de Kepler.

Solution

Exercice 49 (réf 68)

On fait l'approximation, pour les calculs, que l'orbite de la Lune autour de la Terre peut être considérée comme circulaire.

1. En utilisant la deuxième loi de Newton, démontrer que la période de révolution de la Lune T et la distance Terre-Lune D sont reliées par la formule :

$$\frac{T^2}{D^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

2. En déduire la distance Terre-Lune D.

3. Calculer l'écart relatif ε entre les valeurs d'apogée et de périgée et conclure quant à l'approximation de l'orbite circulaire.

Données :

- **Période de révolution de la Lune :** $T = 656\ h$

- **Masse de la Terre :** $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Distance maximale entre la Terre et la Lune (apogée) :** $a = 406\,300\ km$
- **Distance minimale entre la Terre et la Lune (périgée) :** $b = 356\,700\ km$

Solution

Exercice 50 (réf 38)

La planète Pluton était considérée comme la 9e planète de notre système solaire. Cependant, la découverte de nouveaux corps, dont Eris (2005), gravitant autour du Soleil a provoqué son déclassement en planète naine.
Eris parcourt une orbite elliptique autour du Soleil avec une période de révolution $T_E = 557\ ans.$
Dysnomie est un satellite naturel d'Eris dont le rayon de l'orbite circulaire est égal à $r_D = 3{,}60\ 10^7 m$ dont la période de révolution vaut $T_D = 15{,}0\ j = 1{,}30 \times 10^6\ s$.

1. Énoncer la 3e loi de Kepler.
2. En déduire la position de l'orbite d'Eris par rapport à celle de Pluton sachant que la période de révolution de Pluton est $T_P = 248\ a.$
3. Établir l'expression vectorielle du vecteur accélération $\overrightarrow{a_D}$ du centre d'inertie de Dysnomie.
4. Représenter le vecteur accélération $\overrightarrow{a_D}$ sur un schéma en précisant sa direction et son sens.
5. Démontrer que la période de révolution de Dysnomie est :

$$T_D = 2\pi \sqrt{\frac{r_D^3}{G \cdot M_E}}$$

6. Calculer M_E, la comparer avec la masse de Pluton $M_P = 1{,}31\ 10^{22}\ kg$ et conclure.

Solution

Exercice 51 (réf 39)

Dans la saga *Star Wars*, Tatooine a la particularité d'être en orbite autour de deux étoiles Tatoo 1 et Tatoo 2. Du point de vue de la planète, tout se passe comme si les étoiles n'en faisaient qu'une. On peut estimer que leur distance est légèrement supérieure à 10 millions de kilomètres. En vérité, pour ne pas être inhabitable et expliquer son aspect désertique, une bonne position de Tatooine serait de deux cents millions de kilomètres.

1. En supposant que Tatoo 1 et Tatoo 2 sont à égale distance de Tatooine, montrer, en s'appuyant sur la photo et sur le texte, que la valeur du rayon de chacune des deux étoiles est environ égale à deux millions de kilomètres.
2. En supposant que les étoiles possèdent la même masse volumique que le Soleil, évaluer leur masse.
3. Faire un schéma du système Tatooine-Tatoo$_{1\text{-}2}$ et représenter sans souci d'échelle la force d'attraction gravitationnelle exercée par Tatoo$_{1\text{-}2}$ sur Tatooine ainsi que le vecteur accélération de Tatooine.
4. Montrer que le mouvement, supposé circulaire, de la planète dans ce référentiel est uniforme.
5. Déterminer la période de révolution de Tatooine.
   Conclure.

Données :

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m^3 \cdot\, kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Rayon :** $R_{Soleil} = 7{,}0 \times 10^5 km$
- **Masse :** $M_{Soleil} = 2{,}0 \times 10^{30}\, kg$
- **Volume d'une sphère de rayon r :** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Solution

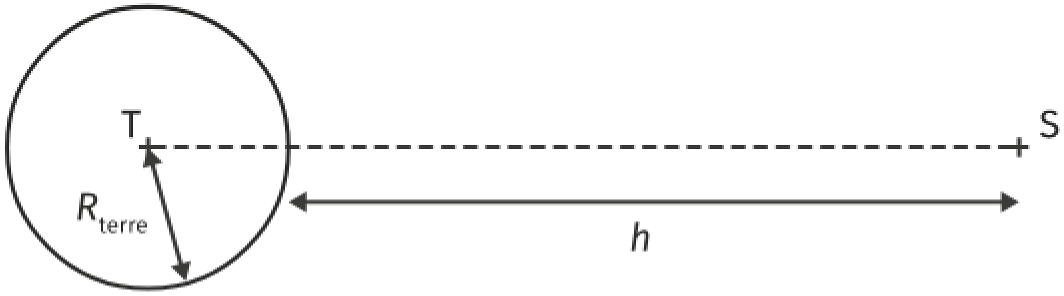
Exercice 52 (ref 40)

Les satellites d'observation sont des objets spatiaux en orbite circulaire autour de la Terre. Ils transmettent toutes les données obtenues à une station terrestre.

I. ENVISAT - Satellite circumpolaire

On considère le satellite comme ponctuel, noté S.

1. Donner l'expression vectorielle de la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite $\overrightarrow{F_{T/S}}$.
2. Compléter le schéma et représenter cette force en précisant le vecteur unitaire choisi.



3. Établir l'expression vectorielle de l'accélération du satellite dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen, en fonction de M_{Terre}, h et R_{Terre} . On ne considérera que la seule action de la Terre.
4. Compléter sur le schéma de la question **2.**, et sans souci d'échelle, le vecteur accélération.
5. Montrer que, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, la vitesse du satellite a pour expression :

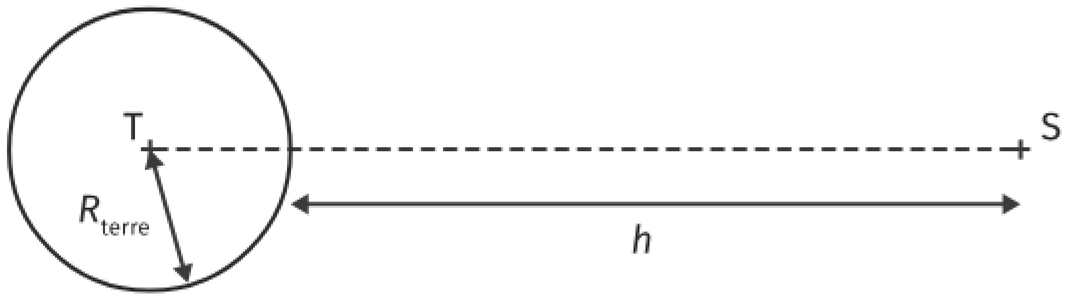
$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Terre}}{R_{Terre} + h}}$$

6. Calculer la vitesse du satellite en $km \cdot s^{-1}$.
7. Donner l'expression de la période de révolution du satellite en fonction de v, R_{Terre} et h. Calculer sa valeur.

II. METEOSAT 8 – Satellite géostationnaire

Situé à une altitude H voisine de 36 000 km, il fournit de façon continue des informations.

1. Donner deux autres conditions à remplir par *Meteosat 8* pour qu'il soit géostationnaire.
2. Énoncer la 3e loi de Kepler.
3. En utilisant les réponses à la question **I.**, établir l'expression de la constante K de la loi précédente en fonction de G et M_{Terre}, pour les satellites étudiés.
4. Calculer K.



Données :

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot\ kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Masse de *ENVISAT* :** $m = 8\,200\ kg$
- **Altitude moyenne de *ENVISAT* :** $h = 800\ km$
- **Masse de la Terre :** $M_{Terre} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
- **Rayon de la Terre :** $R_{Terre} = 6{,}38 \times 10^{3}\ km$
- **Période de rotation propre :** $T_{Terre}\ = 1\,436$ min

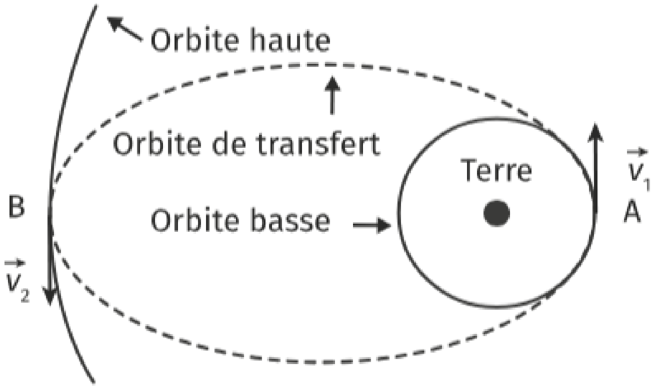
Solution

Exercice 53 (ref 41)

Les systèmes de lanceurs *Soyouz* mettent des modules habités et des satellites en orbite. Au bout d'environ dix minutes de vol, à une altitude de près de 220 km, le module *Soyouz* est mis en orbite basse autour de la Terre. Puis après des corrections orbitales, il rejoint l'orbite de la Station spatiale internationale (ISS).

1. Indiquer quel référentiel est le plus adéquat pour réaliser l'étude de la trajectoire du module *Soyouz*.
2. Préciser quelle hypothèse on peut faire sur la nature des trajectoires du module et de l'ISS
3. En utilisant la période orbitale du module *Soyouz*, déterminer sa vitesse v_S.
4. Démontrer l'expression suivante :
$$\frac{T_S^2}{(R_{Terre} + h_S)^3} = \frac{T_{ISS}^2}{(R_{Terre} + h_{ISS})^3}$$
5. Déterminer la valeur de la vitesse v_{ISS}

Le module peut rejoindre l'orbite de l'ISS en modifiant sa vitesse. Il passe d'une orbite basse à une orbite plus haute en empruntant une orbite de transfert.



6. Montrer que $v_2 < v_1$.

Données :

- **Masse de la Terre :** $M_{Terre} = 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
- **Rayon de la Terre :** $R_{Terre} = 6{,}38 \times 10^{3}\ km$
- **Période de rotation propre :** $T_{Terre} = 1\ 436$ min
- **Altitude de l'orbite basse de *Soyouz* :** $h_S = 220\ km$
- **Période orbitale de Soyouz l'orbite basse :** $T_S = 88{,}66\ min$
- **Altitude de l'orbite haute de Soyouz :** $h_S = 320\ km$
- **Altitude de la station spatiale :** $h_{ISS} = 400\ \ km$
- **Masse de la station spatiale :** $m_{ISS} = 400 \times 10^{3}\ kg$

Solution

Exercice 54 (réf 69)

Selon les recherches, les comètes ont permis la formation du Soleil et des planètes. Elles contiendraient de l'eau, des acides aminés et d'autres molécules complexes à l'origine de la vie. C'est pourquoi l'ESA a lancé la sonde européenne *Rosetta* en 2004 afin d'étudier les caractéristiques de la comète 67P Churyumov-Gerasimenko, surnommée Tchouri, au cours de l'année 2014. En juillet 2014, après avoir été mise en orbite circulaire autour de la comète, la sonde *Rosetta* a commencé ses observations et a largué *Philaea* en novembre pour analyser la comète.

Calculer la vitesse et la période de révolution de l'orbiteur *Rosetta* autour de « Tchouri».

Données

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Masse du Soleil :** $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\, kg$
- **Masse de Tchouri :** M_T =10 milliards de tonnes
- **Diamètre de Tchouri :** 5 km
- **Altitude de Rosetta par rapport à Tchouri :** 20 km

Solution

Exercice 55 (réf 70)

La NASA a fêté le 21 juillet 2019 le 50e anniversaire du premier pas sur la Lune. L'exploration humaine de la planète Mars est un prochain objectif. Elle améliorerait notre connaissance du système solaire.

1. Lors de la première mission, un module de commande pourrait être utilisé pour communiquer avec la capsule d'atterrissage. Comme pour la mission Apollo 11, en 1969, il pourrait se situer à une altitude de 110 km. Calculer sa vitesse orbitale.

2. Un satellite de transmission serait également nécessaire entre la Terre et les bases martiennes. Déterminer l'altitude à laquelle devrait se situer le module pour être immobile depuis une base martienne.

Données :

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Masse de Mars :** $M_{Mars} = 6{,}42 \times 10^{23}\, kg$
- **Rayon de Mars :** $R_{Mars} = 3{,}39 \times 10^{3}\, km$
- **Demi-grand axe de l'orbite de Mars autour du Soleil :** $a_{Mars} = 2{,}28 \times 10^{11}\, m$
- **Période de rotation propre de Mars sur elle-même :** $T_{Mars} = 24{,}6\, h$
- **Période de révolution de Mars autour du Soleil :** $T_{Mars} = 687\, j$

Solution

Exercice 56 (réf 71)

Lorsqu'un satellite est animé d'un mouvement circulaire autour d'une planète, le rayon r de son orbite et la période T de son mouvement vérifient la loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cste$$

1. Les satellites géostationnaires de la Terre ont une orbite circulaire de rayon $r = 42\,164\ km$ et une période $T_G = 86164\ s$. Calculer la masse M_T de la Terre.
2. Mars a deux satellites naturels, Phobos et Deimos. Phobos gravite à 9380 km du centre de Mars avec une période de 7 h 39 min. Deimos a une trajectoire quasi circulaire de rayon r_D = 23460 km et une période $T_D = 30\ h\ 18\ min$.
   a) Calculer la masse de la planète Mars à partir des caractéristiques du mouvement de Phobos, puis de Deimos.
   b) Comparer les valeurs obtenues.
3. Au cours de la mission APOLLO XVII en 1972, le module de commande en orbite circulaire autour de la Lune, à une distance de 2 040 km du centre de celle-ci, avait une période de 8 240 s dans le repère sélénocentrique.
   Calculer la masse de la Lune.

Données :

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Rayon de la Terre :** $R_{Terre} = 6{,}38 \times 10^3\ km$
- $g_0 = 9{,}8\ m/s^2$

Solution

Exercice 57 (réf 72)

Le télescope spatial HUBBLE a été mis sur une orbite circulaire autour du centre T de la Terre. Il évolue à une altitude $h = 600\ km$. Ce télescope, considéré comme un objet ponctuel, est noté H et a une masse $m = 12103\ kg$.
Les images qu'il fournit, sont converties en signaux électriques et acheminées vers la Terre par l'intermédiaire de satellites en orbite circulaire à une altitude $h_G = 35\,800\ km$.

1. a) Appliquer la loi de l'attraction universelle de Newton au télescope situé à l'altitude h.
   b) Donner, en fonction de m, g_0, R_T et h , l'expression littérale de la valeur de la force de gravitation qu'il subit. g_0 est l'accélération due à l'attraction, au niveau du sol de la Terre.
   c) Calculer la valeur de cette force pour $h = h_H = 600\ km$.
2. Le mouvement du télescope est étudié dans le repère géocentrique dont l'origine est T.
   a) Montrer que son mouvement circulaire est uniforme.
   b) Exprimer littéralement sa vitesse v sur son orbite en fonction de R_T, g_0 et h puis la calculer en m/s et en km/h quand $h = h_H = 600\ km$.
   c) Déterminer sa période de révolution T.

Données :

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m^3 \cdot\, kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Rayon de la Terre :** $R_{Terre} = 6{,}38 \times 10^3\, km$
- $g_0 = 9{,}8\, m/s^2$

Solution

Exercice 58 (réf 73)

Le satellite américain d'observation Landsat-5 est assimilable à un point matériel décrivant une orbite circulaire d'altitude $z = 705\, km$ autour de la terre. Sa masse vaut $m_{sat} = 2\, tonnes$.

I. 1. Dans quel référentiel cette trajectoire est-il défini ?
 2. Montrer que la vitesse du satellite est constante dans ce référentiel.
 3. Exprimer la vitesse de Landsat-5 en fonction de g, r_T et z (altitude de la trajectoire).

II. 1. Calculer la vitesse du satellite et en déduire son énergie cinétique.
 2. L'énergie potentielle du satellite dans le champ de gravitation terrestre s'exprime par :

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_{Sat}}{r}$$

En choisissant l'origine des énergies potentielles à distance infinie de la terre : calculer sa valeur dans le cas présent.

En déduire l'énergie mécanique du satellite.

 3. a) Quelle énergie minimale faut-il fournir à Landsat-5 pour qu'il s'éloigne définitivement de la terre.
 b) Calculer la vitesse de libération de ce satellite, supposé initialement sur son orbite autour de Terre.

 Comparer avec la valeur habituelle.

- **Masse de la Terre :** $M_{Terre} = 5{,}97 \times 10^{24}\, kg$
- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\, m^3 \cdot\, kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Rayon de la Terre :** $R_{Terre} = 6{,}38 \times 10^3\, km$
- $g = 9{,}8\, m/s^2$

Solution

Exercice 59 (réf 74)

Dans un repère géocentrique supposé galiléen, on considère un satellite de centre d'inertie S dont la trajectoire' est une orbite circulaire située dans le plan équatorial à l'altitude $h = 7{,}8.10^5\ m$ autour de la terre.

On considère que la Terre est sphérique et homogène de masse M_T , de centre d'inertie O et de rayon r_T.

I. 1. a) Faire un schéma sur lequel apparaitra la force exercée par la Terre sur le satellite, le vecteur champ gravitationnel créé en S et le vecteur unitaire $\vec{U}_{OS}$.

b) A partir de la loi de gravitation universelle, établir la valeur du vecteur champ de gravitation $g(h)$ à l'altitude h en fonction de G, M_T , r_T et h. En déduire que $g(h) = g\,\frac{R_T^2}{(r_T+h)^2}$

2. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
3. Etablir l'expression de la vitesse V du satellite dans le référentiel géocentrique en fonction de g, r_T et h, et celle de la période T et de vitesse angulaire ω.

II. On considère maintenant un satellite en orbite à basse altitude h

1. Calculer numériquement V, T et ω.
2. Le satellite se déplace dans le même sens que la terre.
   Déterminer la durée T' qui sépare deux passages successifs du satellite à la verticale d'un point donné de l'Equateur. On rappelle que la période de rotation de la terre sur elle-même est $T_0 = 8{,}64 \times 10^4\ s$.

III. On considère maintenant un satellite en orbite géostationnaire.

1. Quelle est la particularité d'un satellite géostationnaire ?
2. Exprimer l'altitude h à laquelle évolue un tel satellite puis calculer sa valeur.

IV. On considère maintenant qu'un satellite évoluant initialement à l'altitude $h_0 = 780\ km$, perd de l'altitude à chaque tour sous l'influence d'actions diverses.
La réduction d'altitude à la fin de chaque tour est supposée égale au millième de l'altitude par rapport à l'altitude du tour précédent.

1. Etablir une relation entre l'altitude h_{i+1} en début du $(i\ +\ 1)^{ème}$ tour et l'altitude h_i au début du $i^{ème}$ tour.
2. En déduire une relation entre h_n (l'altitude finale) et h_0.
3. En déduire la valeur de n du nombre de tours effectués par le satellite quand il atteint l'altitude de $400\ km$.

Solution

Exercice 60 (réf 75)

Soit un satellite de masse m tournant autour de la terre de masse M à distance r du centre de la terre. En supposant que sa trajectoire est circulaire :

1. Donner l'expression l'énergie potentielle correspondant à la force de gravitation entre le satellite et la terre, préciser l'origine choisie pour l'énergie potentielle.
2. Donner l'énergie mécanique totale en fonction de G, M, m et r.
3. Montrer que les trajectoires circulaires vérifient la troisième loi de Kepler $\omega^2 r^3 = GM$.
4. Si un satellite parait immobile dans le ciel, calculer sa hauteur, sa vitesse et son énergie totale.
5. Calculer la vitesse de libération de ce satellite.

   On donne : $M = 5.98\ 10^{24}$ kg et m = 68 kg.

Solution

Exercice 61 (réf 76)

La navette spatiale américaine Discovery a été lancée le 7aout 1997 à 10h41 depuis Kennedy Space Center. Pendant la phase de décollage, la masse totale vaut $M = 2{,}041.10^6 kg$, on admet que l'éjection des gaz par les moteurs a les mêmes effets qu'une force de poussée $F = 3{,}24.10^7 N$. On suppose que g reste constante pendant toute la phase de départ.

I. Etude de la phase de lancement

1. Faire l'inventaire de toutes les forces s'exerçant sur la navette à l'instant de décollage et les représenter ces forces sur un schéma.
   (On néglige tous les frottements et la diminution de masse).
2. Calculer la valeur de l'accélération au décollage.
3. Calculer la distance parcourue pendant les 2 secondes qui suivent le décollage et en négligeant la variation de l'accélération pendant cette durée.

II. Etude de Discovery en orbite autour de la Terre

Dix minutes après le décollage, la navette est en mouvement circulaire uniforme autour de la terre à l'altitude $h = 296 km$.

Sa masse égale à $6{,}968.10^4\ kg$.

1. On assimile la navette à un point matériel.
   Sur un schéma, représenter son accélération.
   Que peut-on dire de cette accélération ?
2. a) Montrer que l'intensité du champ de gravitation à l'altitude h est donnée par

$$g(h) = g\left(\frac{R_T}{r_T+h}\right)^2$$

   b) Calculer la valeur de g(h) à l'altitude de l'orbite de Discovery.

3. Montrer que l'expression de la vitesse de la navette est :

$$v = \sqrt{g(h) \cdot (r_T + h)}$$

Faire l'application numérique.

III. Etude de la phase d'approche à, l'atterrissage

Discovery a atterri le 18 aout 1997, à la date $t = 7h07min$. Dans cette phase d'approche, le moteur s'arrête, la navette est soumise à son poids et aux forces de frottement de l'air. On retrouvera ci-dessous la valeur de sa vitesse à différentes dates :
La masse de Discovery dans cette phase d'approche d'atterrissage vaut $69{,}68.10^3 kg$.

$Date$	$Altitude(en\ km)$	$Vitesse(en\ m/s)$
$T_1 = t - 8\ min$	54,86	1475
$T_2 = t - 3\ min$	11,58	223,5

1. Calculer le travail du poids entre les dates T_1 et T_2.
2. En utilisant le Théorème de l'énergie cinétique, calculer le travail des forces de frottements de l'air sur l'orbiteur entre les instants T_1 et T_2 de cette phase d'approche.

Solution

Exercice 62 (réf 77)

On suppose que la Terre, de masse M_T, de rayon r_T et de centre O, est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point matériel. Le satellite artificiel S, de masse m_S, décrit une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. On suppose que le satellite est soumis uniquement à la force gravitationnelle exercée par la Terre. On notera G, la constante de gravitation universelle.

1. Exprimer l'intensité du champ de gravitation terrestre $g(h)$ en fonction de M_T, r_T, h et G. Puis en fonction de r_T , h et g_0.
2. Montrer que le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique est uniforme.
3. En déduire l'expression de la vitesse v_S du satellite en fonction de g, r_T et h puis celle de sa période de révolution T_S.
4. Calculer v_S et T_S sachant que :
   $g = 9{,}8\, m.s^{-2}$; $h = 200\ km$ et $r_T = 6400\ km$.
5. METEOSAT 8 : un satellite géostationnaire.
   Les satellites météorologiques comme Météosat sont des appareils d'observation géostationnaires.

Ce satellite a été lancé par ARIANE 5 le 28 août 2002. Il est opérationnel depuis le 28 janvier 2004. Il fournit de façon continue des informations couvrant une zone circulaire représentant environ 42% de la surface de la Terre.

a) Préciser les conditions à remplir par METEOSAT 8 pour qu'il soit géostationnaire.
b) En déduire, pour METEOSAT 8, la valeur du rayon $r = r_T + h$ de son orbite puis celle de son altitude h.
   Donnée : $M_T = 5{,}98 \times 10^{24} kg$

Solution

Exercice 63 (réf 78)

On considère une planète P de masse M. Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont l'origine coïncide avec le centre O de la planète P et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r.

1. Donner les caractéristiques de la force de gravitation exercée par la planète P sur le satellite S. Faire un schéma.
2. Donner l'expression du vecteur champ de gravitation créé par la planète P au point où se trouve le satellite S.
   Représenter ce vecteur champ sur le schéma précédent.
3. Déterminer la nature du mouvement du satellite S dans le référentiel d'étude précisé.
4. Exprimer le module de la vitesse linéaire v et la période de révolution T du satellite S en fonction de la constante de gravitation G, du rayon r de la trajectoire du satellite et de la masse M de la planète P.
   Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante.
5. Sachant que l'orbite du satellite S a un rayon $r = 185500\ km$ et que sa période de révolution vaut T = 22,6 heures, déterminer la masse M de la planète P.
6. Un autre satellite S' de la planète P a une période de révolution $T' = 108{,}4\ heures$. Déterminer le rayon r' de son orbite.

Solution

Exercice 64 (réf 79)

Un satellite supposé ponctuel, de masse m, décrit une orbite circulaire d'altitude h autour de la Terre assimilée à une sphère de rayon R_T. On fera l'étude dans un référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

1. Etablir l'expression de la valeur g du vecteur champ de gravitation à l'altitude h en fonction de sa valeur g_0 au niveau du sol, de r_T et de h.
2. Déterminer l'expression de la vitesse v_S du satellite, celle de sa période et celle de son énergie cinétique.

 Application numérique : $m_S = 1020\ kg, R_T = 6400 km$ et $h = 400 km$.

3. L'énergie potentielle du satellite dans le champ de pesanteur à l'altitude h est donnée par la relation :

$$E_p = -\frac{G\ m_S m_T}{R_T + h}$$

 avec G constante de gravitation et m_T masse de la Terre et en convenant que $E_P = 0$ pour h = ∞.
 a) Justifier le signe négatif et exprimer E_P en fonction de m_S, R_T, g_0 et h.
 b) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du satellite puis comparer E_P à E_C *et* E à E_C .

4. On fournit au satellite un supplément d'énergie $\Delta E = +5.10^8\ J$. Il prend alors une nouvelle orbite circulaire. En utilisant les résultats du 3, déterminer :
 a) sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse.
 b) sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.

Solution

Exercice 65 (réf 80)

La terre est assimilable à une sphère homogène de centre O, de masse M et de rayon R. Le champ de gravitation créé par la terre en tout point A de l'espace situé à une distance r du point O est $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$ où G est la constante de gravitation universelle et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$

1. Un satellite S de masse m décrit d'un mouvement uniforme une orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Le mouvement est rapporté au repère géocentrique et on suppose que S est soumis à la seule action du champ de gravitation terrestre.
 a) Exprimer la vitesse v de S en fonction de g_0, R et r.
 b) Déduire l'expression de la période T du mouvement.
 Calculer T pour $r = 8000\ km$.

2. A partir du travail élémentaire $dw = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr}$ de la force de gravitation exercée par la terre sur le satellite, montrer que le travail de $\vec{f}$, lors de son déplacement du sol jusqu'à l'orbite de rayon r est donné par : $W = mg_0R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.
3. En déduire l'expression de l'énergie potentielle du système terre-satellite en fonction de g_0, m, r et R.
   On choisira le niveau du sol comme état de référence pour l'énergie potentielle.
4. Exprimer l'énergie cinétique de S en fonction de g_0, m, r et R.
   Déduire l'expression de l'énergie mécanique totale.
5. Il se produit une très faible variation dr du rayon, telle que la trajectoire puisse toujours être comme circulaire.
   Exprimer la variation dv de la vitesse qui en résulte et montrer que : $dv = -\frac{\pi}{T}dr$.

Solution

Exercice 66 (réf 81)

Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages dont la hauteur totale est de 47,4 m et qui pèse, avec sa charge utile (satellite), 208 tonnes au décollage. Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote N_2O_4 (masse de peroxyde emportée : 147,5 tonnes).
L'intensité de la force de poussée totale T de ces 4 réacteurs est constante pendant leur fonctionnement : elle vaut $T = 2445\ kN$.
Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse de 200 km d'altitude un satellite de 4850 kg; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite de $965\ kg$; il peut aussi être utilisé pour placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

I. L'ascension de la fusée Ariane

Le champ de pesanteur g est supposé uniforme : son intensité $est\ g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$.
On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.
On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen

1. a) Représenter clairement, sur un schéma, en les nommant, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.
   b) A un instant quelconque, la masse de la fusée est m.
   Déterminer en fonction de m et des intensités des 2 forces précédentes la valeur de l'accélération a.
2. a) On considère d'abord la situation au décollage. La masse de la fusée vaut alors m_1.

Calculer la valeur de l'accélération a_1 à cet instant.

b) On envisage la situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé.
La masse de la fusée vaut alors m_2. Calculer la valeur de m_2 puis celle de l'accélération a_2 à cet instant.
Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

3. La vitesse d'éjection $\vec{v}_e$ des gaz issus de la combustion du peroxyde d'azote est donnée par la relation :

$$\vec{v}_e = \frac{\Delta t}{\Delta m} \cdot \vec{T}$$

où $\frac{\Delta t}{\Delta m}$ est l'inverse de la variation de masse de la fusée par unité de temps et caractérise la consommation des moteurs.

a) Vérifier l'unité de v_e par analyse dimensionnelle.
Calculer la valeur numérique de v_e.

b) Quel est le signe de $\frac{\Delta t}{\Delta m}$? En déduire le sens de $\vec{v}_e$.
Qu'en pensez-vous ?

c) A l'aide d'une loi connue qu'on énoncera, expliquer pourquoi l'éjection des gaz propulse la fusée vers le haut.

II. Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

On s'intéresse au mouvement d'un satellite artificiel S, de masse m_S, en orbite circulaire (rayon r)autour de la Terre de masse M_T, de rayon R_T et de centre O. On suppose que la Terre est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point.

1. a) Préciser les caractéristiques du vecteur accélération a d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme de rayon r et de vitesse v.

b) Enoncer la loi de la gravitation universelle. On appelle G la constante de gravitation universelle. Faire un schéma sur lequel les vecteurs-forces sont représentés.

2. Le satellite S est à l'altitude h : on a donc $r = R + h$.
On appelle $\vec{F}_S$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite.
Cette force dépend de la position du satellite et on pose $\vec{F}_S = m_S\vec{g}(h)$. On note $g(h)$ l'intensité de la pesanteur à l'endroit où se trouve le satellite :

a) Exprimer $g(h)$ en fonction de M_T, R_T, h et G puis, $g(h)$ en fonction de R_T, h et $g_0 = g(0)$

b) Appliquer le **T**héorème du **C**entre d'**I**nertie au satellite en orbite circulaire.
En déduire l'expression de la vitesse v_S du satellite en fonction de g_0 , R_T et h puis celle de sa période de révolution T_S.

c)Application numérique.
Calculer v_S et T_S sachant que :
$g_0 = 9{,}8\, m.s^{-2}$; $h = 200\, km$ et $R_T = 6400\, km.$

Solution

Exercice 67 (réf 111)

Imaginons un astronaute de masse 70 kg flottant dans l'espace à 10 m du centre de gravité du module Apollo dont la masse est $6{,}0 \times 10^3$ kg. Déterminer la force gravitationnelle qu'exerce le vaisseau spatial sur l'astronaute et l'accélération qui en résulte (à cet instant). Quelle est la force de l'astronaute sur le vaisseau et l'accélération de ce dernier ?

Solution

Exercice 68 (réf 112)

Vénus a un diamètre de $12{,}1 \times 10^3$km et une densité moyenne de $5{,}2 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$. De quelle hauteur tomberait un corps en une seconde près de sa surface ?

Solution

Exercice 69 (réf 113)

Sachant que $\frac{M_L}{M_T} = 0{,}01230$ et $\frac{R_L}{R_T} = 0{,}2731,$ calculer le rapport du poids d'un astronaute sur la Lune (F_{pL}) à son poids (F_{pT}) sur Terre.

Solution

Exercice 70 (réf 114)

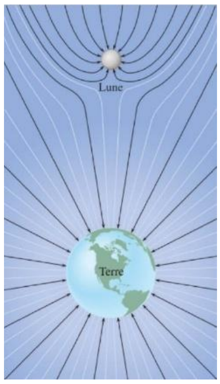
Soit $g_0$la valeur de $g_T(r)$ sur la surface de la Terre, montrer que :

$$g_T(r) = g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2 \; pour \; r \geq R_T$$

Solution

Exercice 71 (réf 115)

Déterminer la position d'un vaisseau spatial sur la droite joignant les centres de la Terre et de la Lune, où les forces exercées sur lui par ces deux corps célestes sont exactement opposées ; le vaisseau est alors sans poids (Voir la figure ci-contre)



On donne :

- $M_T = 5{,}975 \times 10^{24}\ kg$
- $M_L = 7{,}35 \times 10^{22}\ kg$
- $r_{TL} = 3{,}844 \times 10^{8} m$

Solution

Exercice 72 (réf 116)

Mars a une masse $M_M = 0{,}108\, M_T$ et un rayon moyen $R_M = 0{,}534\, R_T$. Déterminer l'accélération de la pesanteur à sa surface en fonction de $g_0 = 9{,}8\, m/s^2$.

Solution

Exercice 73 (réf 117)

Trois très petites sphères, de masses respectives $2{,}50\ kg,\ 5{,}00\ kg$ et $6{,}00\ kg$, sont situées sur une ligne droite dans l'espace, loin de tout autre corps. La première est située entre les deux autres, à $10{,}0\ cm$ à droite de la seconde et à $20{,}0\ cm$ à gauche de la troisième. Calculer la force gravitationnelle subie par la première sphère.

Solution

Exercice 74 (réf 118)

On pense que, pendant l'effondrement gravitationnel d'une étoile, la densité et la pression deviennent tellement élevées que les atomes eux-mêmes seront écrasés, laissant seulement un noyau résiduel de neutrons. Une telle étoile à neutrons ressemble, en certains aspects, à un noyau atomique géant avec une énorme densité de l'ordre de $3 \times 10^{17}\ kg/m^3$. Calculer l'accélération de la pesanteur à la surface d'une étoile à neutrons de masse égale à la masse du Soleil.

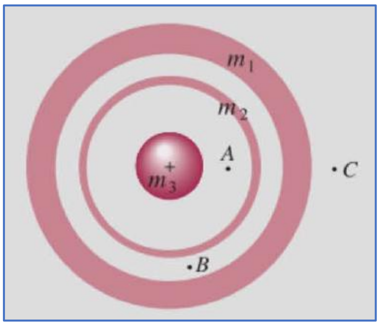
On donne :

- Masse du Soleil = $1{,}987 \times 10^{30}\ kg$.

Solution

Exercice 75 (réf 119)

La figure ci-contre montre deux couches sphériques concentriques, minces, homogènes et de masses m_1 et m_2 autour d'une petite boule de plomb de masse m_3. Écrire l'expression de la force gravitationnelle exercée par ce système sur une particule de masse m si elle est en A, B ou C situés aux distances r_A, r_B et r_C du centre.



Solution

Exercice 76 (réf 120)

Par définition, la Terre est à une distance de 1,000 UA du Soleil. Utilisant le fait que Jupiter est, en moyenne, à 5,2028 UA du Soleil, calculez sa période en années terrestres.

Solution

Exercice 77 (réf 121)

Déterminez la période en années terrestres d'un satellite placé sur une orbite solaire circulaire de rayon 597,9 millions de km.
On donne la distance Soleil-Terre = 1 Unité Astronomique (1UA)$= 1{,}495 \times 10^{11}\ m$.

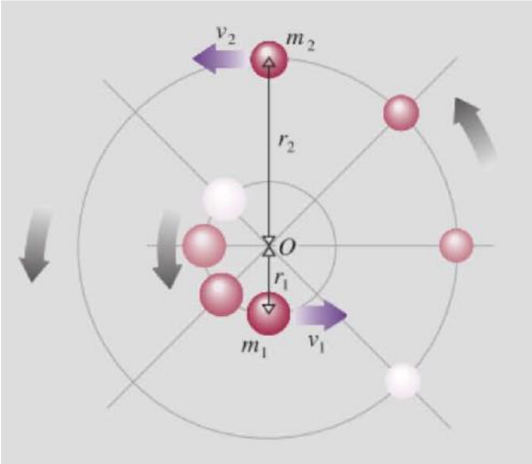
Solution

Exercice 78 (réf 122)

Considérons un corps céleste de masse M (une étoile, une planète ou la Lune), autour duquel un satellite est en orbite. Soit C la constante de Kepler correspondante. Montrez que C/M est une constante universelle, la même pour tous les corps célestes.

Solution

Exercice 79 (réf 123)



Considérons les deux masses comparables m_1 et m_2 de la figure ci-contre, en rotation sur des orbites autour de leur barycentre O, à des distances r_1 et r_2 respectivement et avec une période commune T. Comme leur interaction gravitationnelle mutuelle produit leurs forces centripètes individuelles F_{C1} et F_{C2}, celles-ci doivent être égales. Montrez que :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

et comparer cela avec la définition du centre de gravité.

Ecrivez des expressions explicites pour $F_G = F_{C1}$ et $F_G = F_{C2}$ et combinez les pour obtenir la troisème loi de Kepler dans la version plus exacte de Newton :

$$\frac{(r_1 + r_2)^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\,\pi^2}$$

Solution

Exercice 80 (réf 124)

Dans le cas d'une orbite elliptique, la distance moyenne du corps central au corps en orbite est exactement la moitié du grand axe de l'ellipse. Ce demi grand axe est aussi la moyenne de l'aphélie et du périhélie. L'astéroïde minuscule Icarus (qui a une masse de $5{,}0 \times 10^{12}\ kg$ et un rayon de 0,7 km) a une trajectoire elliptique allongée autour du Soleil. Il coupe l'orbite terrestre, et il a un périhélie de 0,186 UA et un aphélie de 1,97 UA. Calculer sa distance moyenne au Soleil et sa période orbitale en années terrestres.

Solution

Exercice 81 (réf 125)

La galaxie « spirale » Andromède, connue sous le nom de code M31, est distante de $2{,}2 \times 10^6$ années-lumière de la Terre. Les mesures montrent qu'une étoile périphérique, à 5×10^9 UA du centre de cette galaxie, décrit une orbite autour du noyau à une vitesse de 200 km/s. Estimez la masse de M31.
Solution

Exercice 82 (réf 126)

Déterminez le champ gravitationnel au centre d'un anneau uniforme de masse M et rayon R.

Solution

Exercice 83 (réf 127)

Galilée découvrit les quatre lunes principales de la planète Jupiter en 1610. La plus proche, Io, a une période de 1,7699 j (jours terrestres) et elle est à une distance de 5,578 R_J (rayons de Jupiter) du centre de la planète. En déduire la densité moyenne de Jupiter.

Solution

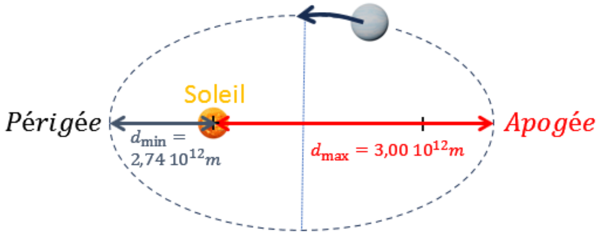
SOLUTIONS DES EXERCICES DE MECANIQUE

Gravitation et Lois de Kepler

Gravitation et Lois de Kepler

Solution 1 (réf 42)

L'énoncé donne une distance « au plus loin » et une distance « au plus près » qui sont bien sûr différentes par définition. Il ne peut donc pas s'agir d'un cercle mais bien d'une **ellipse** comme le mentionne la **première loi de Kepler**.

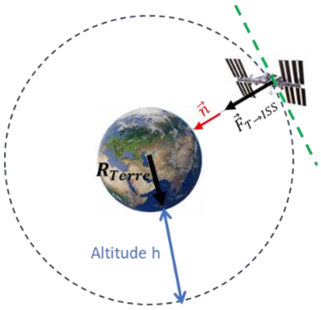


[Retour à l'énoncé]

Solution 2 (réf 43)

1. La trajectoire est circulaire de rayon $r = R_{Terre} + h$

2. La force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur la station ISS est :



$$\vec{F}_{T/ISS} = G \cdot \frac{M_T \cdot M_{ISS}}{(R_{Terre} + h)^2}$$

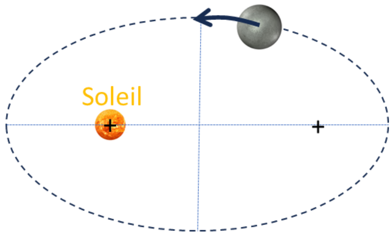
avec

- $\vec{F}_{T/ISS}$ en Newton
- M_T et M_{ISS} en kg
- R_{Terre} et h en m
- G en $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ $(= 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2})$

[Retour à l'énoncé]

Solution 3 (réf 44)

Comme le stipule la première loi de Kepler, tous les objets qui gravitent autour du Soleil, se déplacent suivant **une trajectoire elliptique** dont le Soleil occupe l'un des foyers. Cérès n'y fait donc pas exception !



Retour à l'énoncé

Solution 4 (ref 45)

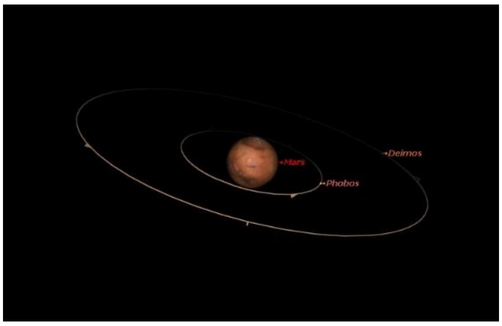
1. On dit d'un mouvement qu'il est « circulaire uniforme » si sa trajectoire décrit un cercle parcouru à vitesse constante et dont la direction est tangente à la trajectoire.
2. Partons de $v = \frac{x}{t}$. Dans le cas d'un mouvement **circulaire** uniforme, x représente la circonférence d'un cercle de rayon r, soit $x = 2\pi r$ et t, la période T, le temps mis pour parcourir cette circonférence. On a alors : $\boldsymbol{v = \frac{2\pi r}{T}}$
3. Soit $r' = \frac{r}{4}$, on alors $v' = \frac{2\pi r'}{T}$ (la question sous-entend que T reste le même).

   Donc, $v' = \frac{2\pi r}{4\,T} \left(= \frac{\pi R}{2T}\right)$. En conclusion, la vitesse sera quatre fois plus petite pour un rayon quatre fois plus petit.

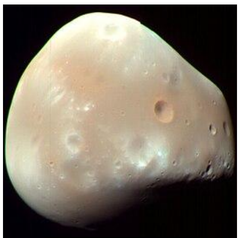
   De manière générale, dans un mouvement circulaire uniforme (et **pour une même période**), la vitesse v diminue si la rayon r diminue.

   Retour à l'énoncé

Solution 5 (réf 46)



Phobos



Deymos

1. La troisième loi de Kepler stipule que « pour toutes les planètes, **le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand-axe est constant** »
2. Appliquons cette troisième loi de Kepler à Phobos :

$$\frac{T_{Phobos}^2}{a_{Phobos}^3} = k$$

Et à Deimos :

$$\frac{T_{Deimos}^2}{a_{Deimos}^3} = k$$

Donc : $\frac{T_{Phobos}^2}{a_{Phobos}^3} = \frac{T_{Deimos}^2}{a_{Deimos}^3}$

L'énoncé autorise à effectuer une approximation en considérant des orbites circulaires.

On a alors : $\frac{T_{Phobos}^2}{r_{Phobos}^3} = \frac{T_{Deimos}^2}{r_{Deimos}^3} \Rightarrow r_{Deimos}^3 = r_{Phobos}^3 \cdot \frac{T_{Deimos}^2}{T_{Phobos}^2} \Rightarrow r_D = \sqrt[3]{\left(r_{Phobos}^3 \cdot \frac{T_{Deimos}^2}{T_{Phobos}^2}\right)}$

$$\boldsymbol{r_D} = \sqrt[3]{\left((9{,}38 \cdot 10^6 m)^3 \cdot \left(\frac{1{,}26\, j}{0{,}32\, j}\right)^2\right)} = 2{,}3389\ 10^7 m = \boldsymbol{23\ 389\ km}$$

Retour à l'énoncé

Solution 6 (réf 47)

Rappelant que pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse tangentielle est constante et donc, l'accélération tangentielle est nulle. Il ne reste donc que l'accélération perpendiculaire (dite centripète), dirigée vers le centre et due au $d\vec{v}/dt$ lorsque la particule évolue sur la circonférence.

Dans le cours, on démontre que $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{r}}$, plus précisément en termes vectoriels $\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{r}$ pour indiquer le sens de $\vec{a}$, dirigé vers le centre, donc opposé au sens de $\vec{r}$, vecteur qui va du centre vers le mobile.

Retour à l'énoncé

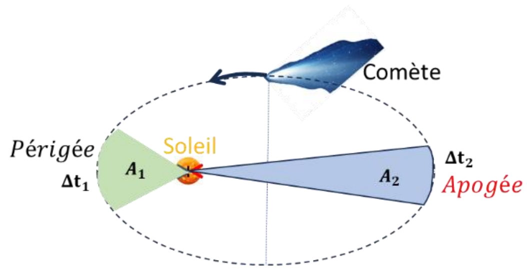
Solution 7 (réf 48)

1. Conformément à la **première loi de Kepler**, le Soleil est situé sur un des **foyers de la trajectoire elliptique** décrite par l'astéroïde.

2. En vertu de la deuxième loi de Kepler, le rayon vecteur Soleil-Planète, balaye des aires égales en des temps égaux.
   L'énoncé stipulant que le temps mis pour aller de M_1 à M_1' est le même temps mis pour aller de M_2 à M_2' , on en déduit que la surface A_1 est la même que la surfaceA_2.
   $$\Rightarrow \boldsymbol{A_1 = A_2}$$

Retour à l'énoncé

Solution 8 (réf 49)



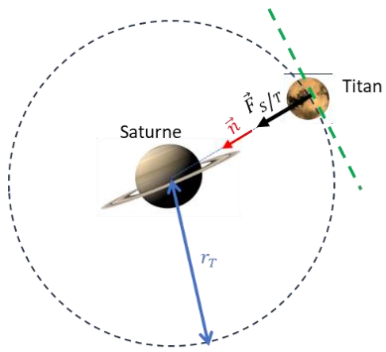
1. et 2. Dès lors que la comète est en orbite autour du Soleil, son orbite est elliptique selon la première loi de Kepler. Le périhélie ou périgée est le point le plus proche du Soleil. L'apogée ou aphélie est le point le plus éloigné. La loi des aires constitue la deuxième loi de Kepler : Les rayons vecteurs joignant le Soleil aux objets célestes balayent des aires égales en des temps égaux.

3. SI $\Delta t_1 = \Delta t_2$ alors $A_1 = A_2$. Or, au périgée, la comète est au plus proche du Soleil. Pour que $A_1 = A_2$, il faut donc forcément que l'ouverture angulaire soit plus grande. L'orbite parcourue au périgée pendant un temps Δt_1 est donc plus longue que l'orbite parcourue à l'apogée pendant le MÊME temps Δt_1. C'est donc que la vitesse est plus élevée au périgée qu'à l'apogée !

Retour à l'énoncé

Solution 9 (réf 50)

1. La trajectoire réelle est elliptique mais l'énoncé précise qu'on peut faire une approximation en la considérant circulaire. Cela mène au schéma suivant :



2. Il s'agit de la Force gravitationnelle entre deux corps. Ici :

$$\vec{F}_{S/T} = G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{r_T^2} \vec{n}$$

où r_T est la distance Saturne - Titan de centre à centre.

3. Partant de $\vec{F}_{S/T} = M_T \vec{a}$, on a $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{S/T}}{M_T} = \frac{G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{r_T^2} \vec{n}}{M_T} = \boldsymbol{G \cdot \frac{M_S}{r_T^2} \vec{n}}$

Notez bien les points importants !

a) La masse de Titan n'intervient pas !

b) Seule la masse de Saturne (et le rayon entre les deux corps) va déterminer l'accélération de Titan.

c) Sans surprise, mais à noter, l'accélération est bien dirigée selon la normale dirigée vers Saturne (mouvement circulaire uniforme)

4. Montrer que le mouvement de Titan est uniforme revient à montrer que sa vitesse est uniforme. On vient de voir que la seule accélération en jeu est l'accélération selon la normale. Elle vaut : a $\boldsymbol{\vec{a} = G \cdot \frac{M_S}{r_T^2} \vec{n}}$. Il n'y a pas d'accélération tangentielle, donc $\boldsymbol{\vec{a}_T = 0}$. Or $a_T = \frac{dv}{dt}$, donc $\frac{dv}{dt} = 0$ ce qui implique que v est constante. On a donc bien affaire à un mouvement circulaire uniforme.

5. Dans un mouvement circulaire uniforme, on sait que $a_N = \frac{v_T^2}{r}$ et on vient de calculer que dans le cas d'une attraction gravitationnelle :

$$a_N = G \cdot \frac{M_S}{r_T^2}, \text{ donc } \frac{v_T^2}{r_T} = G \cdot \frac{M_S}{r_T^2} \Leftrightarrow v_T^2 = G \cdot \frac{M_S}{r_T}$$

$$\boldsymbol{v_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r_T}}}$$

$$\boldsymbol{v_T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67\ 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \cdot 5{,}69 \times 10^{26}\ kg}{1{,}22 \times 10^{9}\ m}} = \boldsymbol{5{,}58 \cdot 10^3\ m/s}$$

Retour à l'énoncé

Solution 10 (ref 89)

Rappelons que le poids d'un objet est la force de gravitation exercée par un objet massif (planète, étoile, etc) sur cet objet.
Donc (sur Terre, avec M_T la masse de la Terre), $F = \frac{GM_T\, m}{r}$.
Si la masse de l'objet est doublée : $m \longrightarrow 2m$
Si la distance au centre terrestre est doublée : $r \longrightarrow 2r$

Et le nouveau poids F'devient donc : $F' = \frac{GM_T(2m)}{(2\, r)^2} = \frac{2GM_T\, m}{4\, r^2} = \frac{1}{2}\frac{GM_T\, m}{r^2} = \frac{1}{2}F$
En conclusion, si sa masse de l'objet est doublée et sa distance au centre de la Terre est aussi doublée, le nouveau poids sera diminué de moitié.

Retour à l'énoncé

Solution 11 (ref 90)

La loi de base est : $F = \frac{GM_C m_b}{r^2}$ avec M_C, la masse du boulet de canon ; m_b, la masse de la bille, et r, la distance entre les deux objets.

D'où : $m_b = F\frac{r^2}{G\, M_C} = 1{,}48 \times 10^{-10} \times \frac{(0{,}3)^2}{(6{,}67\times 10^{-11}\cdot 20)} = 0{,}010\; kg = 10\; g$

Retour à l'énoncé

Solution 12 (ref 91)

La loi de base est : $F = \frac{GM_s M_s}{r^2}$ avec M_s, la masse de l'une des sphères, et r, la distance entre les deux sphères.

On a alors :

$$F = \frac{GM_s M_s}{r^2} = \frac{G(M_s)^2}{r^2} \Rightarrow M_s^2 = \frac{F\cdot r^2}{G} = \frac{(1{,}00\cdot(1{,}00)^2)}{6{,}67\cdot 10^{-11}} = \frac{1}{6{,}67\cdot 10^{-11}}$$

$$= 14\,992\,503\,748\; kg^2$$

$$\Rightarrow M_s = \sqrt{14\,992\,503\,748\; kg^2} = 1{,}22\; 10^5\; kg$$

Retour à l'énoncé

Solution 13 (ref 92)

La loi de base est : $F = \frac{GM_T m}{r^2}$ avec M_T, la masse de la Terre, m, la masse de l'objet et r, la distance 'centre de la Terre – centre de l'objet'.

$$\Rightarrow\ F = \frac{GM_T m}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{G\,M_T\,m}{F}} = \sqrt{\frac{6{,}67\ 10^{-11} \cdot 5{,}975\ 10^{24} \cdot 1}{1}} \approx 2{,}0 \times 10^7 m$$

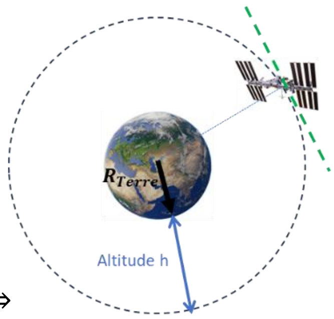
Note, le rayon terrestre étant environ 6 360 000 m, cela veut dire que l'objet se trouve à environ : $20\,000\,000 - 6\,360\,000 = 13\,640\,000\ m \approx 13640\ km$ de la surface terrestre.

Retour à l'énoncé

Solution 14 (ref 51)

1. Un schéma aide toujours !

Il s'agit ici de calculer simplement la circonférence d'u cercle dont le rayon vaut $r = T_T + altitude\ satellite$,
Soit $C_{ISS} = 2\,\pi\,(6370 + 400) km = 42537\ km$



2. La période de révolution est le temps mis pour parcourir la circonférence à la vitesse du satellite $\Rightarrow v_{ISS} = \frac{C_{ISS}}{T_{ISS}} \Rightarrow$ $T_{ISS} = \frac{C_{ISS}}{v_{ISS}}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_{ISS}} = \frac{42\,537\ km}{27600\,\frac{km}{h}} = 1{,}54\ h \approx \boldsymbol{1h32\ min}$$

Retour à l'énoncé

Solution 15 (ref 93)

À la surface de la Terre, l'accélération g est donnée par : $g = \frac{GM_T}{r_T^2}$.
Si r_T devient $\frac{1}{2} r_T$, alors la nouvelle accélération g' devient : $g' = \frac{GM_T}{\left(\frac{1}{2} r_T\right)^2} = 4\ \frac{GM_T}{r_T^2} = 4g.$
L'accélération sera donc multipliée par 4

Retour à l'énoncé

Solution 16 (ref 94)

La force gravitationnelle Terre-Lune est donnée par : $F_{TL} = G\frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2}$.

La force gravitationnelle Soleil-Lune est donnée par : $F_{SL} = G\frac{M_S \cdot M_L}{r_{SL}^2}$.

Le rapport entre les deux forces est donc :

$$\frac{F_{TL}}{F_{SL}} = \frac{G\frac{M_T \cdot M_L}{r_{TL}^2}}{G\frac{M_S \cdot M_L}{r_{SL}^2}} = \frac{\frac{M_T}{r_{TL}^2}}{\frac{M_S}{r_{SL}^2}} = \frac{M_T}{r_{TL}^2} \cdot \frac{r_{SL}^2}{M_S} = \frac{5{,}975\ 10^{24} \times (1{,}495\ 10^{11})^2}{(3{,}844\ 10^8)^2 \cdot\ 1{,}987\ 10^{30}} \approx 0{,}5$$

Notez que pour la distance Soleil-Lune, on a pris en fait la distance Soleil-Terre, ce qui est vrai en moyenne (vu que la Lune orbite autour de la Terre). De toute façon, si on souhaitait faire un calcul plus précis à un moment donné en fonction de la position de la Lune, la 'vraie' distance Soleil-Lune ne serait influencée au maximum qu'au 3ème chiffre après la décimale vu que l'on ajouterait ou soustrairait 10^8 à 10^{11}, ce qui ne change pas grand-chose…

Retour à l'énoncé

Solution 17 (ref 95)

La force gravitationnelle Uranus - Neptune est donnée par :

$$F_{UN} = G\frac{M_U \cdot M_N}{r_{UN}^2} = 6{,}67\ 10^{-11}\frac{(14{,}6 \times 5{,}975\ 10^{24}) \cdot (17{,}3 \times 5{,}975\ 10^{24})}{(4{,}9\ 10^{12} m)^2}$$
$$= \mathbf{2{,}5\ 10^{16} N}$$

Retour à l'énoncé

Solution 18 (ref 96)

La densité de la sphère est sa masse divisée par son volume ➔ $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho \cdot V$

Or $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ➔ $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$

Les deux centres sont séparés d'une distance $r = 2R$.

Et donc, la force gravitationnelle entre les deux sphères vaut ;

$$F = G.\frac{MM}{r^2} = G\frac{\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2}{(2R)^2} = G\rho^2\frac{16}{9}\frac{\pi^2 R^6}{4\ R^2} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\boldsymbol{G\ \rho^2 \pi^2 R^4}$$

Retour à l'énoncé

Solution 19 (ref 97)

D'abord un peu de cinématique, si vous ne connaissez pas la formule par cœur…
En toute généralité, dans le MRUA, on a :

$$v = v_0 + at \qquad (1)$$

Et

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (2)$$

Ayant considéré que la position initiale est $x_0 = 0$

De (1), on tire : $t = \frac{v-v_0}{a}$

Que l'on injecte dans (2) : $x = \frac{v_0(v-v_0)}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2$

Il vient :

$$x = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{1}{2\,a}\left(v^2 - 2vv_0 + v_0^2\right) = \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$
$$= \boldsymbol{\frac{v^2 - v_0^2}{2a}}$$

Adaptons cette formule à notre problème où l'on considère l'axe $\vec{z}$ dirigé vers le haut. On a alors $a = -g$ puisque g est dirigé vers le bas.

D'où $x = \frac{v^2-v_0^2}{-2g}$. Or, dans le cas d'un saut en hauteur, lorsque $x = h$, càd au sommet du saut, la vitesse est nulle. Il vient donc : $h = -\frac{v_0^2}{-2g} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Sur Vénus, on a donc : $h_V = \frac{v_0^2}{2\,g_V}$ et sur la Terre : $h_T = \frac{v_0^2}{2\,g_T}$.

Et donc :

$\frac{h_V}{h_T} = \frac{\frac{v_0^2}{2\,g_V}}{\frac{v_0^2}{2\,g_T}} = \frac{g_T}{g_V}$ puisque les vitesses initiales sont égales (énoncé).

D'où $h_V = \frac{g_T}{g_V} \cdot h_T \overset{g_V = 0{,}88\,g_T}{=} \frac{g_T}{0{,}88\,g_T}\,h_T = \frac{h_T}{0{,}88} = \frac{1}{0{,}88} \approx 1{,}11\,m$

Conclusion : **si on saute 1 m de haut sur la Terre, on sautera 1,11 m sur Vénus, à vitesse initiale égale.**

Retour à l'énoncé

Solution 20 (ref 98)

Par rapport au centre de la Terre, la fusée orbite à une distance $r = R_T + 4R_T = 5R_T$.
Dès lors, la force subie par une masse m vaut :

$$F = G\,\frac{m\,m_T}{(5\,R_T)^2} = \frac{1}{25}\,G\,\frac{m\,m_T}{R_T^2} = \frac{1}{25}\,F_g$$

Donc, le poids dans la fusée vaut $\frac{1}{25}$ du poids terrestre !

Retour à l'énoncé

Solution 21 (ref 99)

La force électrique étant donnée $(8{,}2 \times 10^{-8} N)$, il n'y a même pas besoin de la calculer. Il faut donc simplement calculer le rapport $\frac{F_E}{F_G}$ où $F_G = G\frac{m_{e^-} \cdot m_p}{r^2}$.

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{8{,}2 \cdot 10^{-8}}{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 9{,}1 \times 10^{-31} \cdot 1{,}7 \times 10^{-27}}{(5{,}3 \times 10^{-11})^2}} = 2,2 \times 10^{39}$$

Retour à l'énoncé

Solution 22 (ref 100)

En effet, si $r \geq R_T$, la formule générale est $g_T = \frac{GM_T}{r^2}$.

Dans le cas où $r = R_T$, on a bien sûr $g_T = \frac{GM_T}{R_T^2}$ ce qui correspond bien à la définition de l'accélération due à la gravitation au niveau du sol terrestre : $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$

Retour à l'énoncé

Solution 23 (ref 101)

On part de la formule générale de l'accélération de la pesanteur à la surface d'un objet de masse M et de rayon r : $g = \frac{GM}{r^2}$. Pour Mars, notons : $g_M = \frac{GM_M}{r^2}$

On isole **M** : $M_M = \frac{g_M \cdot r^2}{G} = \frac{3{,}7 \cdot (3{,}4 \times 10^6)^2}{6{,}67 \times 10^{-11}} = \boldsymbol{6,4 \times 10^{23}\ kg}$

Le rapport $\frac{M_M}{M_T} = \frac{6{,}4 \times 10^{23}}{5{,}975 \times 10^{24}} = 0{,}11$

Retour à l'énoncé

Solution 24 (ref 108)

On cherche l'accélération gravitationnelle due à la Lune, d'un corps situé sur la Terre. On utilise la définition de g pour un corps attracteur, ici la Lune :

$$g_l = \frac{GM_l}{r^2}$$

Ici, r est la distance Terre-Lune.

$$g_l = \frac{GM_l}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{7{,}35 \times 10^{22}}{(3{,}844 \times 10^8)^2} = 3{,}32 \times 10^{-5}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 25 (ref 109)

On cherche l'accélération gravitationnelle induite par une petite sphère de masse 1 kg. On utilise la définition de g pour un corps attracteur, ici la petite sphère :

$$g_s = \frac{GM_s}{r^2}$$

Ici, r est la distance sphère – objet test, soit 1 m.

$$g_s = \frac{GM_s}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{(1)^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 26 (ref 110)

On cherche l'accélération gravitationnelle due au Soleil, d'un corps situé sur la Terre. On utilise la définition de g pour un corps attracteur, ici le Soleil :

$$g_S = \frac{GM_S}{r^2}$$

Ici, r est la distance Terre-Soleil.

$$g_S = \frac{GM_S}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1{,}987 \times 10^{30}}{(1{,}495 \times 10^{11})^2} = 5{,}93 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 27 (réf 52)

1. Un satellite géostationnaire est un satellite qui est toujours situé à la verticale d'un même lieu de la Terre. Il semble donc immobile pour un observateur terrestre. Sa période de rotation est donc égale à celle de la Terre (~ 24 heures)
2. Le référentiel le plus adapté pour étudier le mouvement d'un satellite géostationnaire est un référentiel dont le centre est confondu avec le centre de la Terre et dont les trois axes perpendiculaires pointent vers des étoiles supposées fixes. C'est le référentiel dit **géocentrique**.
3. Partant de $\vec{F}_{T/S} = m\,\vec{a_S}$, et sachant que cette force n'est autre que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite $F_{T/S} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2}\vec{n}$, on a donc :

$$m\,\vec{a_S} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2}\vec{n} \Rightarrow a_s = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

Retour à l'énoncé

Solution 28 (réf 53)

1. Un satellite géostationnaire est un satellite qui est toujours situé à la verticale d'un même lieu de la Terre. Il semble donc immobile pour un observateur terrestre. Sa période de rotation est donc égale à celle de la Terre (~ 24 heures)

2. La période moyenne de rotation de la Terre est de 24 h (précisément 23 h 56min 4s)

3. Sa période de rotation d'un satellite géostationnaire est égale à celle de la Terre (~ 24 heures). La période de révolution de NOOA étant de 100 min, soit 1h40 min, il ne peut pas être géostationnaire. Par contre, la période de révolution de Meteosat est de 1440 min soit 24 h ! Il peut donc bien être considéré comme un satellite géostationnaire.

Retour à l'énoncé

Solution 29 (réf 102)

D'une part, la force gravitationnelle du système Soleil - Terre est : $F_g = G\frac{M_S M_T}{r_{TS}^2}$.

D'autre part, on suppose que la Terre orbite sur une trajectoire quasi-circulaire pour ce problème. Il existe donc une force centripète :$F_c = m_T \cdot \frac{v^2}{r_{TS}}$.

Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_S M_T}{r_{TS}^2} = M_T \cdot \frac{v^2}{r_{TS}} \Rightarrow M_S = r_{TS} \cdot \frac{v^2}{G}$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_{TS}$ parcourue en un temps $t = \tau = 365{,}25\, jours = 365{,}25 * 24 * 3600\ s$

Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_{TS}}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_{TS}^2}{\tau^2}$

Donc, au final :

$$\boldsymbol{M_S} = r_{TS} \cdot \frac{v^2}{G\,\tau^2} = \frac{4\,\pi^2 r_{TS}^3}{\tau^2\ \cdot G} = \frac{4\,\pi^2\,(1{,}495 \times 10^{11})^3}{(365{,}25 * 24 * 3600)^2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11}} = \mathbf{2{,}00 \times 10^{30}}\boldsymbol{kg}$$

Retour à l'énoncé

Solution 30 (réf 103)

D'une part, la force gravitationnelle du système Lune – Satellite est : $F_g = G\frac{M_l M_s}{r^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire. Il existe donc une force centripète : $F_c = m_s \cdot \frac{v^2}{r^2}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_l M_s}{r_{ls}^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_{ls}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM_l}{r_{ls}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_l}{r_{ls}}}$$

Attention : $r_{ls} = (1738 + 62)\ km = 1800 \times 10^3 m$

$$\Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{GM_l}{r_{ls}}} = v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11}\ \cdot\ 7{,}35 \times 10^{22}}{1800 \times 10^3}} = 1650\ m/s$$

Retour à l'énoncé

Solution 31 (réf 104)

D'une part, la force gravitationnelle du système Lune – satellite est : $F_g = G\frac{M_l M_s}{r_{ls}^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Lune. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s \cdot \frac{v^2}{r_{ls}}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_l M_s}{r_{ls}^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_{ls}} \Rightarrow G\frac{M_l}{r_{ls}} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_{ls}$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche

Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_{ls}}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_{ls}^2}{\tau^2}$

Donc, $G\frac{M_l}{r_{ls}} = v^2 \iff G\frac{M_l}{r_{ls}} = \frac{4\,\pi^2 r_{ls}^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_{ls}^3}{G\,M_l} \Rightarrow \tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_{ls}^3}{G\,M_l}}$

où $r_{ls} = 1{,}740 \times 10^6 + 60 \times 10^3 = 1{,}8 \times 10^6\ m$

$\Rightarrow\ \tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_{ls}^3}{G\,M_l}} = \tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{(1{,}8\times10^6\,)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot\,7{,}35\times10^{22}}} =\ 6{,}85 \times 10^3 s \approx 1{,}9\ heure$

Retour à l'énoncé

Solution 32 (réf 105)

D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\frac{M_T M_s}{r_T^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_s}{r_T^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_T} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_T$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche
Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2}$

Donc, $G\frac{M_T}{r_T} = v^2 \iff G\frac{M_T}{r_T} = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^3}{G\,M_T} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\,M_T}} = 2\frac{\pi}{G\,M_T}\sqrt{r_T^3}$

$$= \frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\ \cdot\ 5{,}975 \times 10^{24}}}\sqrt{r_T^3} = \mathbf{3{,}15 \times 10^{-7}}\sqrt{\boldsymbol{r_T^3}}\ \boldsymbol{secondes}$$

Retour à l'énoncé

Solution 33 (réf 106)

D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\frac{M_T M_s}{r_T^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_s}{r_T^2} = M_s \cdot \frac{v^2}{r_T} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_T} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_T$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche
Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2}$

Donc, $G\frac{M_T}{r_T} = v^2 \iff G\frac{M_T}{r_T} = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^3}{G\,M_T} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\,M_T}} = 2\frac{\pi}{\sqrt{G\,M_T}}\sqrt{r_T^3} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\,\cdot\,5{,}975\times10^{24}}}\sqrt{r_T^3}$$

$$= \boldsymbol{3{,}15\times10^{-7}\sqrt{r_T^3}\ secondes}$$

Pour $r_T = 6950\times10^3\,m$, cela donne : $\tau = 3{,}15\times10^{-7}\sqrt{(6950\times10^3)^3} = 5{,}77\times10^3\,s.$

Retour à l'énoncé

Solution 34 (réf 107)

a) D'une part, la force gravitationnelle du système Terre – satellite est : $F_g = G\frac{M_T M_s}{r_T^2}$.
D'autre part, le satellite orbite sur une trajectoire circulaire autour de la Terre. Il existe donc une force centripète :$F_c = M_s\cdot\frac{v^2}{r_T}$.
Les deux forces s'équilibrant, on a :

$$G\frac{M_T M_s}{r_T^2} = M_s\cdot\frac{v^2}{r_T} \Rightarrow G\frac{M_T}{r_T} = v^2$$

Or, $v = \frac{x}{t}$ avec ici : x, la circonférence de l'orbite càd $2\pi r_T$ parcourue en un temps τ, cette période que l'on cherche
Et donc, $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi r_T}{\tau} \Rightarrow v^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2}$
Donc, $G\frac{M_T}{r_T} = v^2 \Leftrightarrow G\frac{M_T}{r_T} = \frac{4\,\pi^2 r_T^2}{\tau^2} \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\,\pi^2 r_T^3}{G\,M_T} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\,\pi\sqrt{\frac{r_T^3}{G\,M_T}} = 2\frac{\pi}{\sqrt{G\,M_T}}\sqrt{r_T^3}$$

Pour un corps attracteur donné (ici on a pris la Terre, mais cela peut être le Soleil, la Lune, etc), on a donc : $\mathrm{T(r)} \propto r^{\frac{3}{2}}$
Dès lors, pour un rayon r_1, on a : $\mathrm{T}_1 \propto r_1^{\frac{3}{2}}$ et pour $r_2 = 2\,r_1$, on a $\mathrm{T}_2 \propto r_2^{\frac{3}{2}} = (2r_1)^{\frac{3}{2}}$
De sorte que :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2r_1)^{\frac{3}{2}}}{r_1^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2r_1}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} \approx 2{,}8$$

$$\Rightarrow T_2 \approx 2{,}8\,T_1$$

b) Nous partons de $v = \frac{x}{t} = \frac{2\pi}{\tau}$

Donc, $v_1 = \frac{2\pi r_1}{\tau_1}$ et $v_2 = \frac{2\pi r_2}{\tau_2}$. Mais $r_2 = 2r_1$ et $T_2 \approx 2{,}8\,T_1$ (vu en (a))
➔ $v_2 = \frac{4\pi r_1}{2{,}8\,\tau_1}$

D'où :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{4\pi r_1}{2{,}8\,\tau_1}}{\frac{2\pi r_1}{\tau_1}} = \frac{2}{2{,}8} = 0{,}71 \quad \Rightarrow v_2 = 0{,}71\,v_1$$

Retour à l'énoncé

Solution 35 (réf 54)

1. La troisième loi de Kepler énonce que pour chaque planète gravitant autour du Soleil, le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du DEMI-grand axe. Soit : $T^2 = \mathcal{K} a_3$ ou $\frac{T^2}{a^3} = \mathcal{K}$ (qu'il soit clair que le facteur de proportionnalité $\mathcal{K}$ est donc le même pour toutes les planètes !)

Eris

2. On a $\frac{T_E^2}{a_E^3} = \mathcal{K} = \frac{T_P^2}{a_P^3} \Rightarrow \frac{T_E^2}{T_P^2} = \frac{a_E^3}{a_P^3}$. D'après l'énoncé, $T_E = 557 > T_P = 248\ a$.

Donc, $\frac{T_E}{T_P} > 1$ et donc, $\frac{T_E^2}{T_P^2} > 1$ qui entraîne $\frac{a_E^3}{a_P^3} > 1 \Rightarrow a_E^3 > a_P^3 \Rightarrow a_E > a_P$.

Conclusion : Eris se déplace sur une orbite plus grande que Pluton !

Retour à l'énoncé

Solution 36 (réf 55)

L'énoncé donnant des rayons d'orbite ainsi que des périodes, c'est la troisième loi de Kepler qui va intervenir.

$$\frac{T_{Io}^2}{a_{Io}^3} = \mathcal{K} = \frac{T_C^2}{a_C^3} \Rightarrow T_C^2 = \left(\frac{a_C}{a_{Io}}\right)^3 \cdot T_{Io}^2$$

L'énonce précise que Callisto est 4,5 fois plus éloignée de Jupiter que Io ➔ $a_C = 4{,}5\,a_{Io}$.

$$\Rightarrow T_C^2 = \left(\frac{a_C}{a_{Io}}\right)^3 \cdot T_{Io}^2 = \left(\frac{4{,}5\,a_{Io}}{a_{Io}}\right)^3 \cdot T_{Io}^2 = (4{,}5)^3 \cdot T_{Io}^2 \Rightarrow \boldsymbol{T_C} = \sqrt{(4{,}5)^3 \cdot (1{,}5)^2}$$

$$= \mathbf{14{,}3}\ \boldsymbol{jours}$$

Retour à l'énoncé

Solution 37 (réf 56)

- $R = 470\ km$
- altitude moyenne $h = 13\ 500\ km$
- T= $15\ j$.
- 3e loi de Kepler pour un mouvement circulaire uniforme :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_C}$$

T : période de révolution de Dawn (s)
r : rayon de l'orbite de Dawn (m)
G : constante de gravitation universelle égale à $G = 6{,}67 \times 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-2} \cdot s^{-2}$
M_C : masse de Cérès (kg)

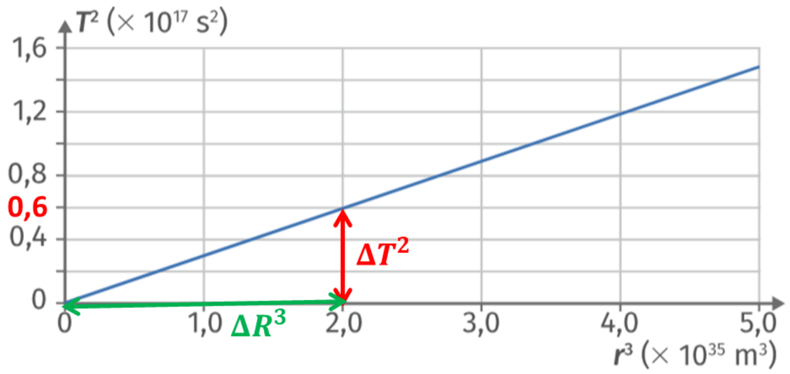
Déterminer la masse de Cérès.

Il s'agit d'une simple application numérique (**distance en *m* et temps en *s* !!!**) :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_C} \Rightarrow M_C = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot ((470 + 13500)10^3)^3}{6{,}67\ 10^{-11} \cdot (15 \times 24 \times 3600)^2} = 9{,}61 \times 10^{20}\ kg.$$

Retour à l'énoncé

Solution 38 (réf 57)



1. La troisième loi de Kepler énonce que pour chaque corps gravitant autour du Soleil, le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du DEMI-grand axe.

Soit : $T^2 = \mathcal{K} a_3$ ou $\frac{T^2}{a^3} = \mathcal{K}$

Sur un graphe T^2 en fonction de R^3 , le coefficient de proportionnalité $\mathcal{K}$ est simplement donné par la pente de la droite, soit $\frac{\Delta T^2}{\Delta R^3}$. Il suffit de prendre un point 'facile à lire' tel que $\Delta R^3 = 2\ 10^{35} m^3$et le ΔT^2qui lui correspond : $0{,}6\ 10^{17}\ s^2$.

Le rapport $\frac{\boldsymbol{\Delta T^2}}{\boldsymbol{\Delta R^3}} = \mathcal{K} = \frac{0{,}6\ 10^{17}\ s^2}{2\ 10^{35} m^3} = \mathbf{3{,}0\ 10^{-19}}\ \frac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{m^3}}$.

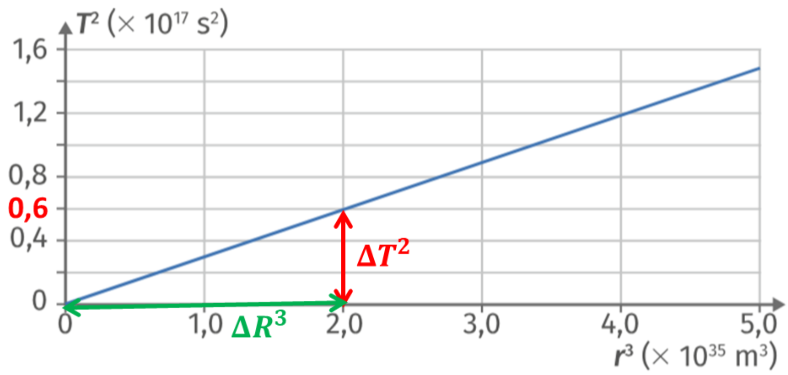
2. On donne

$$r_H = 3{,}45\ u.a. = 3{,}45 \times 1{,}5\ 10^8 \times 10^3\ m$$
$$T = 6{,}398 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600\ s$$
$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{T^2}}{\boldsymbol{a^3}} = \frac{(6{,}398 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600)^2}{(3{,}45 \times 1{,}5\ 10^8 \times 10^3)^3} = \mathbf{2{,}94\ 10^{-19}} \boldsymbol{s^2/m^3}$$

3. Aux erreurs de mesures (ou de lectures du graphique) près, $2{,}94\ 10^{-19} s^2/m^3$ est très proche de $3{,}0\ 10^{-19}\ \frac{s^2}{m^3}$. **On peut raisonnablement conclure que Hermione gravite autour du Soleil !**

Retour à l'énoncé

Solution 39 (réf 58)



1. Sur un graphe T^2 en fonction de R^3 , le coefficient directeur $\mathcal{K}$ est simplement donné par la pente de la droite, soit $\frac{\Delta T^2}{\Delta R^3}$. Il suffit de prendre un point 'facile à lire' tel que $\Delta R^3 = 2\ 10^{35} m^3$et le ΔT^2qui lui correspond : $0{,}6\ 10^{17}\ s^2$.

   Le rapport $\frac{\boldsymbol{\Delta T^2}}{\boldsymbol{\Delta R^3}} = \mathcal{K} = \frac{0{,}6\ 10^{17}\ s^2}{2\ 10^{35} m^3} = \mathbf{3{,}0\ 10^{-19}}\ \frac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{m^3}}$.

   D'autre part, la distance moyenne de Toutatis au Soleil est égale à $2{,}52\ u.a.$ pour une période de révolution de $4{,}01\ a$.

   - $R = 2{,}52\ u.a = 2{,}52 \times 1{,}5 \times 10^8 \times 10^3 m = 3{,}78 \times 10^{11}$ m
   - $T = 4{,}01\ années = 4{,}04 \times 365{,}25 \times 24 \times 3600\ s = 1{,}27492704 \times 10^8\ s$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{\Delta T^2}}{\boldsymbol{\Delta R^3}} = \mathcal{K} = \frac{(1{,}27492704\times10^8)^2\ s^2}{(3{,}78\times10^{11})^3\ m^3} = \mathbf{3{,}0\ 10^{-19}}\ \frac{\boldsymbol{s^2}}{\boldsymbol{m^3}}.$$

2. On constate que le $\frac{\Delta T^2}{\Delta R^3}$ de Toutatis égale le coefficient directeur $\frac{\Delta T^2}{\Delta R^3}$ des objets orbitant autour du Soleil. On conclut que Toutatis appartient au système solaire !

Retour à l'énoncé

Solution 40 (réf 59)

1. Les périodes et rayons d'orbite étant données, l'idée va être de se baser sur la troisième loi de Kepler qui énonce que pour chaque corps gravitant autour d'un astre, le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du DEMI-grand axe.
Soit : $T^2 = \mathcal{K}a_3$ ou $\frac{T^2}{a^3} = \mathcal{K}$
Pour notre question, on peut bien sûr faire les calculs à la calculatrice mais je vous conseille plutôt de faire un tableau Excel, pour minimiser les erreurs et aussi … vous entraîner sur un tableur (outil fondamental pour traiter des données en physique) !
Cela donne ce tableau :

Satellite	Période T (j)	Période T (s)	T^2 (s^2)	r (km)	r(m)	r^3 (m^3)	T^2/R^3
Io	1,8	155520	24186470400	4,22E+05	4,22E+08	7,52E+25	3,22E-16
Europe	3,6	311040	96745881600	6,71E+05	6,71E+08	3,02E+26	3,20E-16
Triton	5,9	509760	2,59855E+11	3,55E+05	3,55E+08	4,47E+25	5,81E-15
Callisto	16,7	1442880	2,0819E+12	1,88E+06	1,88E+09	6,64E+27	3,13E-16

On voit immédiatement que Io, Europe et Callisto ont sensiblement le même rapport $\frac{T^2}{a^3}$, alors que Triton est un ordre de grandeur en dessous ! Triton est donc l'intrus ! De fait Triton est un satellite de Neptune 😉 .

Retour à l'énoncé

Solution 41 (réf 60)

1. L'énoncé précise que Triton orbite de manière circulaire autour de Neptune.
La seule force qui existe entre-elles est la force de gravitation : $F = \frac{G\ M_{Nep}\cdot m_{Tri}}{r^2}$.

La deuxième loi de Newton dit : $F = m_{Tri} \cdot a_{Tri}$

$$\Rightarrow\ m_{Tri} \cdot a_{Tri} = \frac{G\ M_{Nep}\cdot m_{Tri}}{r^2} \Leftrightarrow a_{Tri} = \frac{G\ M_{Nep}}{r^2}\ .$$

Or, pour un Mouvement Circulaire Uniforme, on a $a = \frac{v^2}{r}$

Donc : $\frac{v_{Tri}^2}{r} = \frac{G\,M_{Nep}}{r^2} \Leftrightarrow v_{Tri}^2 = \frac{G\,M_{Nep}}{r} \Rightarrow v_{Tri} = \sqrt{\frac{G\,M_{Nep}}{r}}$

Soit $\boldsymbol{v_{Tri}} = \sqrt{\frac{6{,}67\ 10^{-11} \times\ 1{,}025\ 10^{26}}{3{,}547\ 10^{8}}} = \boldsymbol{4,39\ 10^3\ m/s}$

2. La troisième loi de Kepler stipule que pour chaque corps gravitant autour d'un astre, le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du DEMI-grand axe.

Soit : $T^2 = \mathcal{K} a_3$ ou $\frac{T^2}{a^3} = \mathcal{K}$

Dans le cas de Néréide autour de Saturne, on a :

- $\frac{T_{Ner}^2}{a_{Ner}^3} = \frac{T_{Tri}^2}{a_{Tri}^3}$ puisque tous deux gravitent autour du même astre (Neptune)

  Donc : $T_{Ner}^2 = \frac{T_{Tri}^2 \cdot a_{Ner}^3}{a_{Tri}^3}$ où :
  - $T_{Tri} = 5\ j\ 21\ h = 141\ h = 141 \times 3600\ s = 5{,}076\ 10^5\ s$
  - $a_{Tri} = 3{,}547\ 10^5 km = 3{,}547\ 10^8 m$
  - $a_{Ner} = 5513\ 10^3 km = 5513\ 10^6\ m$

$$\Rightarrow T_{Ner} = \sqrt{\frac{T_{Tri}^2 \cdot\ a_{Ner}^3}{a_{Tri}^3}} = \sqrt{\frac{4{,}317\ 10^{40}}{4{,}4625\ 10^{25}}} = \boldsymbol{3,11\ 10^7 s = 360\ jours}$$

Retour à l'énoncé

Solution 42 (réf 61)

1. La période de révolution T d'un satellite est la durée nécessaire pour effectuer une rotation complète de l'astre autour duquel il orbite.

2. Pour ne pas retenir par cœur, on part simplement de $v = x/t$. Dans le cas d'un mouvement circulaire, $x = 2\pi r$, la circonférence à parcourir et $T,$ le temps mis pour parcourir cette circonférence. On a donc :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

3. L'énoncé donne : $v^2 = G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}$, soit $v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}}$

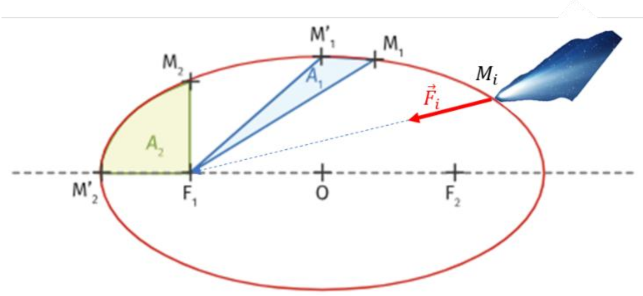
En (2), nous venons de trouver que $v = \frac{2\pi r}{T}$ où $r = R_T + h$ ($r =$ rayon de l'orbite).

Donc :

$$\frac{2\pi(R_T + h\,)}{T} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R_T + h}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{G \cdot M_T} \Rightarrow \boldsymbol{T} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{4\pi^2 (R_T + h)^3}}{\boldsymbol{G \cdot M_T}}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 43 (réf 62)



1. La comète évolue selon une trajectoire elliptique (1ère loi de Kepler), dont les des 2 foyers (F_1) est occupé par le Soleil. O est le centre de l'ellipse et va servir à définir le demi grand axe.
2. Les durées de parcours entre les points M_1 et M_1' puis entre M_2 et M_2' sont égales, alors que la distance M_2M_2' est plus grande que M_1M_1' , il est donc évident que la comète va plus vite entre M_2 et M_2' qu'entre M_1 et M_1'.
3. Prenons un point quelconque M_i. La force d'interaction gravitationnelle de la comète au point M_i sera toujours dirigée vers le Soleil, càd, vers F_1, donc sur le segment m_iF_1. La force en tout point i est donc égale à : $\vec{F}_{i\,S/C} = G \cdot \frac{M_S \cdot m}{r_{i\,F_1}} \overrightarrow{M_iF_1}$

Retour à l'énoncé

Solution 44 (réf 63)

1. Nommons E, un élément d'anneau qui orbite de manière circulaire autour de Saturne. La seule force qui existe entre cet élément et Saturne est la force de gravitation :

$$F_{S/E} = \frac{G\,M_S \cdot m_E}{r^2}$$

La deuxième loi de Newton dit : $F = m_E \cdot a_E$

$\Rightarrow\ m_E \cdot a_E = \frac{G\,M_S \cdot m_E}{r^2} \Leftrightarrow a_E = \frac{G\,M_S}{r^2}$.

Or, pour un Mouvement Circulaire Uniforme, on a $a = \frac{v^2}{r}$

Donc : $\frac{v_E^2}{r} = \frac{G\,M_S}{r^2} \Leftrightarrow v_E^2 = \frac{G\,M_S}{r}$

2. Etant donné que $v_E^2 = \frac{G\,M_S}{r}$, la vitesse ne dépend QUE de la distance entre l'élément de l'anneau et Saturne (les autres paramètres M_S et G étant constants) laquelle se trouve au dénominateur. Donc, plus r est petit (càd proche de Saturne), plus la vitesse de l'élément sera grande.

Retour à l'énoncé

Solution 45 (réf 64)

1. Un mouvement est uniforme si la norme de sa vitesse est constante. Dans le cadre d'un mouvement circulaire, cette vitesse est considérée le long d'un cercle.
2. La force principale est la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite : $F_{T/S} = G \cdot \frac{M_T M_S}{r^2}$
Les autres forces (forces de frottement dues à l'air résiduel) ou la poussée d'Archimède du satellite dans l'air résiduel sont complètement négligeables à ce niveau d'étude.
3. Soit M_m la masse du module qui orbite de manière circulaire autour de la Terre. La seule force qui existe entre le module et la Terre est la force de gravitation :
$$F_{S/m} = \frac{G\, M_T \cdot M_m}{(R_T + h)^2}$$
La deuxième loi de Newton dit : $F = M_m \cdot a_m$
$\Rightarrow\ M_m \cdot a_m = \frac{G\, M_T \cdot M_m}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow a_m = \frac{G\, M_T}{(R_T+h)^2}$.
Or, pour un Mouvement Circulaire Uniforme, on a $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$
Donc : $\frac{v_M^2}{R_T+h} = \frac{G\, M_T}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow v_M^2 = \frac{G\, M_T}{R_T+h} \Rightarrow \boldsymbol{v_m} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G\, M_T}}{\boldsymbol{R_T+h}}}$

4. Il s'agit d'une application numérique directe du point précédent :
$$v_m = \sqrt{\frac{G\, M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67\ 10^{-11} \times 5{,}97\ 10^{24}}{(6370 + 225)10^3}} = 7{,}77 \times 10^3\, \frac{m}{s} = 27973\, \frac{km}{h}$$

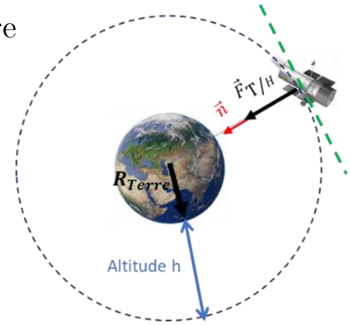
5. $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} = \frac{2\pi(6370+225)\times 10^3}{7{,}77\times 10^3} = 5330\ s = \mathbf{1{,}48}\ \boldsymbol{h}$

Données

- **Constante de gravitation universelle :** $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$
- **Rayon de la Terre :** $R_T = 6\ 370\ km$
- **Masse de la Terre :** $M_T = 5{,}97\ 10^{24}\ kg$

Retour à l'énoncé

Solution 46 (réf 65)



1. Hubble tournant autour de la Terre, on va utiliser un repère **géocentrique**, càd, dont l'origine est le centre de la Terre.
2. La force principale est la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite : $F_{T/S} = G \cdot \frac{M_T M_S}{r^2}$

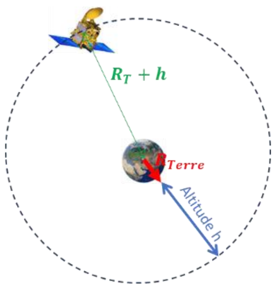
   Les autres forces (forces de frottement dues à l'air résiduel) ou la poussée d'Archimède du satellite dans l'air résiduel sont complètement négligeables à ce niveau d'étude.

   En effet, la circonférence étant de 42 000 km, le rayon de l'orbite est : $\frac{42000}{2\pi} = 6684\ km.$ Auquel on retranche le rayon terrestre pour connaître l'altitude de Hubble au-dessus de la Terre : $h = (6684 - 6371)km = 313\ km.$ On est donc dans le niveau haut de la thermosphère, endroit où les molécules sont très chaudes mais … très rares. On considère généralement qu'au-dessus d'une altitude de 100 km, tant les forces de frottement que celle de la poussée d'Archimède sont négligeables.

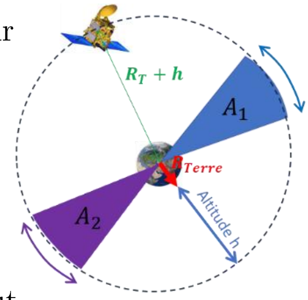
Retour à l'énoncé

Solution 47 (réf 66)

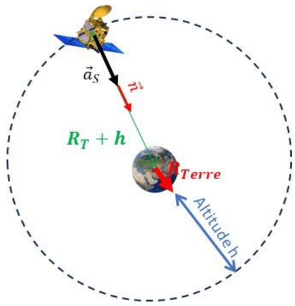
1. SARAL tournant autour de la Terre, on va utiliser un repère **géocentrique**, càd, dont l'origine est le centre de la Terre.
2. L'orbite est considérée circulaire. SARAL orbite à une altitude h au dessus de la Terre, elle-même de rayon R_T.



3. La deuxième loi de Kepler énonce qu'un objet qui orbite autour d'un astre balaye des aires égales en des temps égaux. Or, dans notre cas, l'orbite est considérée comme circulaire.
Dès lors, quel que soit l'endroit du satellite, les longueurs d'arc de cercle parcourus par le satellite sont de longueurs égales pour une même durée de temps. Càd, que le satellite avance à vitesse constante tout le long de la trajectoire. On conclut qu'il s'agit alors d'un MCU (**M**ouvement **C**irculaire **U**niforme).



4. Comme dans tout mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération se situe sur le segment satellite-astre attracteur et est dirigé vers l'astre attracteur.



5. Soit M_S la masse de SARAL qui orbite de manière circulaire autour de la Terre.
La seule force qui existe entre le SARAL et la Terre est la force de gravitation :

$$F_{T/S} = \frac{G\,M_T \cdot M_S}{(R_T + h)^2}$$

La deuxième loi de Newton dit : $F = M_S \cdot a_S$

$\Rightarrow\ M_S \cdot a_S = \frac{G\,M_T \cdot M_S}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow a_S = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2}$.

Or, pour un Mouvement Circulaire Uniforme, on a $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$

Donc : $\frac{v_S^2}{R_T+h} = \frac{G\,M_T}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow v_S^2 = \frac{G\,M_T}{R_T+h} \Rightarrow \boldsymbol{v_S} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G\,M_T}}{\boldsymbol{R_T+h}}}$

6. Partant de (5) : $v_S = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T+h}}$, on a : $v_S^2 = \frac{G\,M_T}{R_T+h}$. On isole h :

$$h = \frac{G \cdot M_T}{v_S^2} - R_T$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{h} = \frac{6{,}67\ 10^{-11} \cdot 5{,}97\ 10^{24}}{(7{,}47\ 10^3)^2} - 6370000 = 766\ 068\ m = \mathbf{766\ km}$$

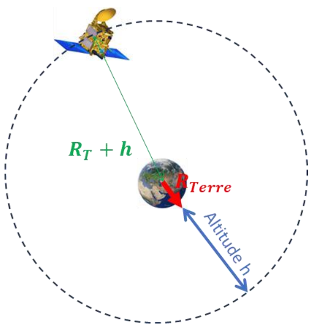
7. Les satellites géostationnaires orbitent à une altitude moyenne de 36 000 km. **SARAL** n'est donc **PAS** du tout un satellite **géostationnaire** !

Retour à l'énoncé

Solution 48 (réf 67)

1. Un satellite géostationnaire est un satellite qui apparait immobile pour un observateur terrestre. Il fait donc une rotation en 24 h. Alors qu'un satellite dit 'à défilement' a une rotation plus grande ou moins grande que 24 h et se déplace pour un observateur terrestre. On en voit fréquemment et facilement dans le ciel étoilé. Alors que le satellite géostationnaire n'est pas 'repérable' dans le sens où il pourrait être confondu avec une étoile si tant est qu'il puisse être visible, ce qui n'est pas le cas, car situé à 35870 km d'altitude …

2.



3. Si on représente la Terre par un point O correspondant à son centre de masse, il faut alors aussi considérer le satellite par un point S, càd que ses dimensions sont négligeables vis-à-vis des distances en eju (orbite, circonférence, etc) et que sa masse est considérée comme homogène et concentrée en un point.

4. La troisième loi de Kepler énonce que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe de l'orbite elliptique, pour un objet orbitant autour d'un astre attracteur.

Soit $T^2 = \mathcal{K}a^3$

Dans le cas d'une orbite circulaire, le demi grand axe n'est autre que le rayon r et donc : $\frac{T^2}{r^3} = \mathcal{K}$.

Or la seule force existante est la force gravitationnelle : $F = G \cdot \frac{M_T m_s}{r^2}$.

Le mouvement étant circulaire uniforme : $F = m_s a_s = \frac{m_s v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T m_s}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$.

Enfin, pour un MCU, $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T^2 = 4\frac{\pi^2 r^2}{v^2}$. Remplaçons v^2 par $G \cdot \frac{M_T}{r}$.

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_T} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}} \qquad \blacksquare$$

5. Le plus facile est de faire un tableau sur un tableur style Excel en ajoutant une colonne «orbite r (m)», et une autre où on effectue le rapport $\frac{T^2}{r^3}$.

Satellite	Rayon orbite r (km)	Rayon orbite r (m)	Période T (s)	rapport T^2/r^3
Goes 17	4,22E+04	4,22E+07	8,62E+04	9,89E-14
Meteosat	4,21E+04	4,21E+07	8,58E+04	9,87E-14
Noaa 20	7,19E+03	7,19E+06	6,08E+03	9,95E-14
Jason 3	7,70E+03	7,70E+06	6,74E+03	9,95E-14

On constate immédiatement qu'aux erreurs de mesures près, le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est (heureusement !) le même ($\approx$ 9.9 10^{-14}) pour tous les satellites.
Ce tableau confirme la troisième loi de Kepler, tout au moins … pour un mouvement circulaire ! Mais bien sûr, un tableau similaire pour les planètes confirme la justesse de la troisième loi de Kepler pour les orbites elliptiques également !

Retour à l'énoncé

Solution 49 (ref 68)

1. La troisième loi de Kepler énonce que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe de l'orbite elliptique, pour un objet orbitant autour d'un astre attracteur.
Soit $T^2 = \mathcal{K}a^3$
Dans le cas d'une orbite circulaire (notre problème), le demi grand axe n'est autre que le rayon r et donc : $\frac{T^2}{r^3} = \mathcal{K}$ où r est la distance Terre-Lune
Or la seule force existante est la force gravitationnelle : $F = G \cdot \frac{M_T m_L}{r^2}$.
Le mouvement étant circulaire uniforme : $F = m_L a_L = \frac{m_L v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T m_L}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$.
Enfin, pour un MCU, $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T^2 = 4\frac{\pi^2 r^2}{v^2}$. Remplaçons v^2 par $G \cdot \frac{M_T}{r}$.
$\Rightarrow T^2 = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}$ et enfin, $\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G \cdot M_T}}$

2. $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G \cdot M_T} \Rightarrow r^3 = G \cdot \frac{M_T \cdot T^2}{4\,\pi^2} \Rightarrow \boldsymbol{r} = \sqrt[3]{G \cdot \frac{M_T \cdot T^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{6{,}67\ 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97\ 10^{24} \cdot (656 \times 3600)^2}{4\,\pi^2}} =$ 383 163 710 m = **383 163 km**

3. L'écart relatif par rapport

a. à l'apogée est : $\frac{406\,300 - 383\,163}{383163} = 0{,}06 = 6\%$

b. au périgée est : $\frac{383\,163 - 356\,700}{383163} = 0{,}069 \approx 7\%$

Tout dépend de l'utilisation des données !! Pour un astronome devant faire des calculs précis, il est évident que l'écart est « énorme » et qu'il ne pourra pas considérer l'orbite comme circulaire. Pour étudiant qui doit faire des calculs approximatifs mais pas trop loin de la réalité, l'écart de 6-7 % est négligeable et donc, l'orbite peut être considérée comme circulaire !

Retour à l'énoncé

Solution 50 (réf 38)

Eris parcourt une orbite elliptique autour du Soleil avec une période de révolution $T_E = 557\ ans.$
Dysnomie est un satellite naturel d'Eris dont le rayon de l'orbite circulaire est égal à $r_D = 3{,}30\ 10^7 m$ dont la période de révolution vaut $T_D = 15{,}0\ j = 1{,}30 \times 10^6\ s$.

1. La troisième loi de Kepler énonce que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe de l'orbite elliptique, pour un objet orbitant autour d'un astre attracteur.
Soit $T^2 = \mathcal{K} a^3$

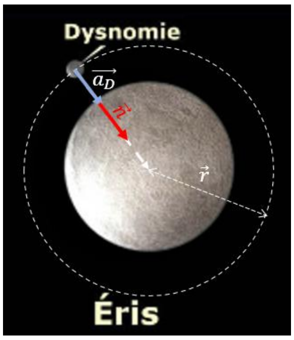
2. Eris et Pluton tournant autour du Soleil (l'astre « attracteur » de la définition ci-dessus), on a :

$$\frac{T_P^2}{a_P^3} = \mathcal{K} = \frac{T_E^2}{a_E^3} \Rightarrow a_E^3 = \left(\frac{T_E}{T_P}\right)^2 \cdot a_P^3 \Rightarrow \left(\frac{a_E}{a_p}\right)^3 = \left(\frac{T_E}{T_P}\right)^2 = \left(\frac{557}{248}\right)^2 \approx 5$$

On déduit que $a_E^3 = 5\ a_P^3$ et donc que l'orbite d'Eris est bien au-delà de celle de Pluton.

3. On part de $\vec{F}_D = M_D \cdot \vec{a}_D = G \cdot \frac{M_E \cdot M_D}{r_D^2}\ \vec{N} \Rightarrow \vec{a}_D = G \cdot \frac{M_E}{r_D^2}\ \vec{N}$ où $\vec{N}$ est le vecteur dirigé de Dysnomie vers Eris.

4.



5. Dans le cas d'une orbite circulaire (notre problème), le demi grand axe n'est autre que le rayon r et donc : $\frac{T^2}{r^3} = \mathcal{K}$ où r est la distance Eris-Dysnomie

Or la seule force existante est la force gravitationnelle : $F = G \cdot \frac{M_E m_D}{r^2}$.

Le mouvement étant circulaire uniforme:

$$F = m_D a_D = \frac{m_D v^2}{r} = G \cdot \frac{M_E m_D}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_E}{r}.$$

Enfin, pour un MCU, $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T_D^2 = 4\frac{\pi^2 r^2}{v^2}$. Remplaçons v^2 par $G \cdot \frac{M_E}{r}$.

$$\Rightarrow T_D^2 = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_E} \Rightarrow T_D = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_E}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_E}}$$

6. De (5.), on tire :

$$T_D^2 = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_E} \Rightarrow M_E = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot T_D^2} = \frac{4\,\pi^2 (3{,}60\ 10^7)^3}{6{,}67\ 10^{-11} \cdot (1{,}30\ 10^6)^2} = 1{,}63\ 10^{22}\ kg$$

La masse de Pluton étant $1{,}31\ 10^{22} kg$, on conclut que la masse d'Eris est supérieure à celle de Pluton, ce qui a justifié de déclasser Pluton comme planète et de la reclasser dans la catégorie des planètes naines.

Retour à l'énoncé

Solution 51 (réf 39)

1. Le calcul va évidemment dépendre de la taille de la photo sur votre support (papier, téléphone, tablette, écran, etc et du zoom que vous faites). Sur mon écran, la distance entre les 2 étoiles est de 2 cm et le rayon d'une étoile est de 0,4 cm.
Etant donné que 2 cm sur le dessin représente 10 millions de km en réalité, alors 0,4 cm sur le dessin (càd 5 fois moins) représente environ 2 millions de km.
On conclut que le rayon d'une étoile est en effet approximativement de 2 millions de km.

2. On donne dans l'énoncé :

- $R_{Soleil} = 7{,}0 \times 10^5 km$

- Masse : $M_{Soleil} = 2{,}0 \times 10^{30}\ kg$
- Volume d'une sphère de rayon r : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

La masse volumique du Soleil est donnée par : $\rho_S = \frac{M_S}{V_S}$

La masse volumique d'une étoile Tatoo est donnée par : $\rho_T = \frac{M_T}{V_T}$

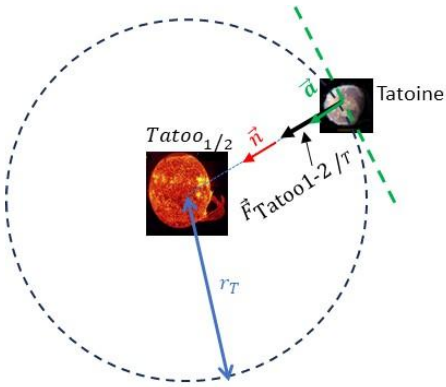
Or, on nous indique que $\rho_S = \rho_T$; donc $\frac{M_T}{V_T} = \frac{M_S}{V_S} \Rightarrow \boldsymbol{M_T} = \frac{M_S}{V_S} \cdot V_T = \frac{V_T}{V_S} \cdot M_S$

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_T^3}{\frac{4}{3}\pi r_S^3} \cdot M_S = \left(\frac{r_T}{r_S}\right)^3 \cdot M_S = \left(\frac{2 \times 10^6}{7 \times 10^5}\right)^3 \cdot 2 \times 10^{30} = \left(\frac{20}{7}\right)^3 \cdot 2 \times 10^{30}$$

$= \boldsymbol{4{,}7\ 10^{31}\ kg}$ pour chacune des deux étoiles.

3. On a :

- $\vec{F}_{Tatoo_{1/2}/T} = G \cdot \frac{M_{Tatto1/2}\, M_{Tatooine}}{r^2}\ \vec{n}$ dirigé vers $Tatoo_{1/2}$
- $\vec{F} = m_{Tatoine} \cdot \vec{a}_{Tatooine}$ dirigée selon $\vec{n}$, càd vers $Tatoo_{1/2}$.



4. Faisant comme hypothèse un mouvement circulaire, l'accélération normale est $a = \frac{v^2}{r}$ alors que l'accélération tangentielle est nulle : $\vec{a}_T = 0 \Leftrightarrow \frac{dv_T}{dt} = 0 \Leftrightarrow v_T = constante.$

Dès lors que la vitesse tangentielle est constante, on est bien dans le cadre d'un mouvement circulaire uniforme !

5. Notons M_T la masse de Tatoo1 additionnée à la masse de Tatoo2 puisque l'énoncé précise qu'on peut assimiler les deux étoiles à une seule. Donc,

$M_T = M_{tatoo1} + M_{tatoo2} = 2 \times 4{,}7\ 10^{31}\ kg = 9{,}4\ 10^{31}\ kg$.

Et notons M_t, la masse de Tatooine.

La seule force existante est la force gravitationnelle : $F = G \cdot \frac{M_T M_t}{r^2}$.

Le mouvement étant circulaire uniforme :

$$F = M_t a_t = \frac{M_T v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T M_t}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}.$$

Enfin, pour un MCU, $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T_t^2 = 4\frac{\pi^2 r^2}{v^2}$. Remplaçons v^2 par $G \cdot \frac{M_T}{r}$.

$$\Rightarrow T_t^2 = \frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_T} \Rightarrow T_t = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 r^3}{G \cdot M_T}} = 2\pi \times \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}}$$

$$\Rightarrow T_t = 2\pi \times \sqrt{\frac{(200 \times 10^6 \times 10^3)^3}{6{,}67\ 10^{-11} \cdot 9{,}4 \times 10^{31}}} = \boldsymbol{7{,}1\ 10^6\ s \approx 0{,}22\ ann\acute{e}e}$$

Retour à l'énoncé

Solution 52 (réf 40)

I. ENVISAT - Satellite circumpolaire

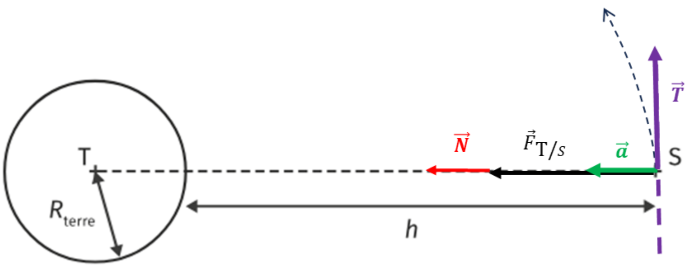
On considère le satellite comme ponctuel, noté S.

1. Attention, l'altitude r par rapport au centre de la Terre est $r = R_{Terre} + h$

$$\Rightarrow \vec{F}_{T/S} = G \cdot \frac{M_T M_S}{(R_T + h)^2}\ \vec{N}$$

où le vecteur $\vec{N}$ est orienté vers le centre de la Terre.

2.



3. Partant de la deuxième loi de Newton : $\vec{F}_S = M_S \cdot \vec{a}_S$

La force gravitation vaut : $\vec{F}_{T/S} = G \cdot \frac{M_T M_S}{(R_T+h)^2}\ \vec{N}$

$$\Rightarrow M_S \cdot \vec{a}_S = G \cdot \frac{M_T M_S}{(R_T + h)^2}\ \vec{N} \ \Rightarrow\ \vec{a}_S = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}\ \vec{N}$$

4. Voir le schéma de la réponse (2) où le vecteur accélération $\vec{a}$ est représenté en vert et bien dirigé selon la normale à la trajectoire du satellite, $\vec{N}$.

5. Dans le cas du MCU, $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h} \Rightarrow \frac{v^2}{R_T+h} = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{G \cdot M_T}}{\boldsymbol{R_T+h}}}$

6. Partant de $\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$: $\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{6,67\ 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{(6,38 \times 10^3 + 800) 10^3}} = \mathbf{7447}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} = \mathbf{7,45}\ \boldsymbol{km/s}$

7. Adaptant $v = \frac{x}{t}$ au MCU, on a : $v = \frac{2\pi r}{T}$. Soit pour notre problème :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} = \frac{2\,\pi\,(6380 + 800)\,km}{7{,}45\,km\,/s} = 6055\,s = 1{,}68\,h$$

II. METEOSAT 8 – Satellite géostationnaire

Situé à une altitude H voisine de 36 000 km, il fournit de façon continue des informations.

1. Outre le fait qu'il doit être situé à (environ) 36 000 km, il faut aussi qu'il orbite dans le plan équatorial ET avec une période de révolution égale à celle de la Terre ET qu'il tourne dans le même sens que la rotation de la Terre, de sorte qu'il apparait immobile pour un observateur terrestre.
2. La troisième loi de Kepler énonce que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe de l'orbite elliptique, pour un objet orbitant autour d'un astre attracteur.
   Soit $T^2 = \mathcal{K} a^3$
3. De la question précédente, on a : $\mathcal{K} = \frac{T^2}{a^3}$. Pour un mouvement circulaire, $a^3 = r^3$.
   Donc, $\mathcal{K} = \frac{T^2}{a^3} = \frac{T^2}{r^3}$ (où, rappelons-le : $r = R_T + h$ dans notre problème.
   De I.7, on tire : $T^2 = \frac{4\,\pi^2\,(R_T + h)^2}{v^2}$.
   De I.5, on tire $v^2 = \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}$.
   D'où :
   $$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,(R_T + h)^2}{v^2} = \frac{4\,\pi^2\,(R_T + h)^3}{G \cdot M_T} = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{G \cdot M_T} \Rightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{T^2}}{\boldsymbol{r^3}} = \frac{\mathbf{4}\,\boldsymbol{\pi^2}}{\boldsymbol{G \cdot M_T}}}$$

4. , $\mathcal{K} = \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{G \cdot M_T} = \frac{4\,\pi^2}{6{,}67\ 10^{-11} \times 5{,}97\ 10^{24}} = 9{,}91\ 10^{-14}\ s^2/m^3$

Retour à l'énoncé

Solution 53 (réf 41)

Les systèmes de lanceurs *Soyouz* mettent des modules habités et des satellites en orbite. Au bout d'environ dix minutes de vol, à une altitude de près de 220 km, le module *Soyouz* est mis en orbite basse autour de la Terre. Puis après des corrections orbitales, il rejoint l'orbite de la Station spatiale internationale (ISS).

1. Soyouz étant un satellite orbitant autour de la Terre, le référentiel est le plus adéquat pour réaliser l'étude de sa trajectoire est le référentiel **géocentrique**.

2. A ce niveau scolaire, on peut négliger l'orbite elliptique et considérer comme un bon modèle une orbite circulaire autour de la Terre.

3. Partant de $v = \frac{x}{t}$ et adaptant au MCU, on a : $v = \frac{2\pi r}{T}$. L'altitude h étant de 200 km et R_T étant le rayon terrestre, on a $r = R_T + h$. Donc :

$$v_S = \frac{2\,\pi(R_T + h)}{T_S}$$

4. L'expression en T^2/r^3 doit faire penser immédiatement à la troisième loi de Kepler. Laquelle stipule que le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe de l'orbite elliptique, pour un objet orbitant autour d'un astre attracteur.
Soit $T^2 = \mathcal{K}a^3$
On a ici, 2 satellites (Soyouz et ISS) qui orbitent à leur altitude respective avec leur période respective et donc, cette troisième loi de Képler s'applique :

$$\frac{T_S^2}{(R_{Terre} + h_S)^3} = \mathcal{K} = \frac{T_{ISS}^2}{(R_{Terre} + h_{ISS})^3}$$

4. $v_{ISS} = \frac{2\,\pi(R_T + h_{ISS})}{T_{ISS}}$ (question 3 ci-dessus).

La question 5 ci-dessus nous donne :

$$T_{ISS}^2 = \frac{(R_T + h_{ISS})^3}{(R_T + h_S)^3} \cdot T_S^2 = \left(\frac{R_T + h_{ISS}}{R_T + h_S}\right)^3 \cdot T_S^2 \Rightarrow T_{ISS} = \sqrt{\left(\frac{R_T + h_{ISS}}{R_T + h_S}\right)^3} \cdot T_S$$

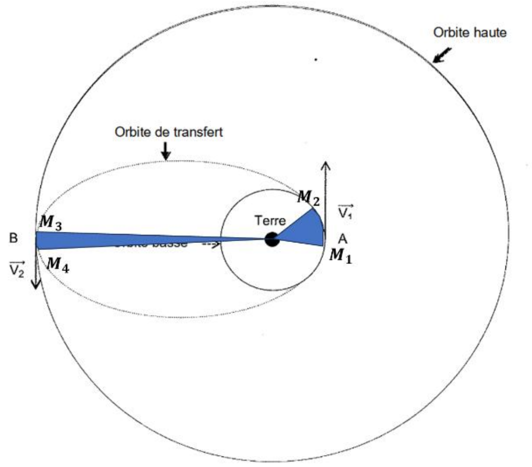
$$\Rightarrow \; T_{ISS} = \sqrt{\left(\frac{6380 + 400}{6380 + 220}\right)^3} \times 88{,}6 \times 60 = \sqrt{\left(\frac{6780}{6600}\right)^3} \times 5319{,}6 = 5538\ s$$

Et donc :

$$v_{ISS} = \frac{2\,\pi(R_T + h_{ISS})}{T_{ISS}} = \frac{2\,\pi(6380 + 400)}{5538} = 7{,}69\ km/s$$

6. La deuxième loi de Kepler énonce qu'un objet qui orbite autour d'un astre balaye des aires égales en des temps égaux.
Dans le graphe ci-dessous, dès lors que les aires (en bleu) sont égales, il est évident que l'ouverture d'angle de l'orbite haute est plus petite que celle de l'orbite basse. Et

donc, la distance parcourue entre M_3 et M_4 est plus petite qu'entre M_1 et M_2. Or d'après la deuxième loi de Kepler, ces deux distances sont effectuées dans le même temps. Dès lors, la vitesse v_2(sur l'orbite haute) est plus petite que la vitesse v_1 (sur l'orbite basse : $\boldsymbol{v_2 < v_1}$.



Retour à l'énoncé

Solution 54 (réf 69)

a) On part de la deuxième loi de Newton : $F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r}$ pour le cas du MCU.

D'autre part, la loi de la gravitation Universelle : $F = G\frac{M\,m}{r^2}$

$$\Rightarrow\ m \cdot \frac{v^2}{r} = G\frac{M\,m}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{r}}}$$

En utilisant les notations des données : $\boldsymbol{v_R} = \sqrt{\boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M_T}}{\boldsymbol{r_{T-R}}}}$

Attention : ne pas oublier que r_{T-R} représente la distance entre le <u>CENTRE</u> de Tchouri et Rosetta. Le diamètre de Tchouri étant 5000 m, son rayon est de 2500 m. Et donc, la distance $r_{T-R} = 2500 + 20000 = 22500\ m$

$$\Rightarrow\ v_R = \sqrt{6{,}67\ 10^{-11} \cdot \frac{10\times10^9\times10^3}{22500}} = \sqrt{\frac{6{,}67}{225}} = 0{,}17\,\frac{m}{s}$$

b) La période de révolution est donnée par :

$$T = \frac{2\,\pi\,r}{v} = \frac{2\pi \cdot 22500}{0.17} = 831598\ s \approx 231\ heures$$

Retour à l'énoncé

Solution 55 (réf 70)

1. On part de la deuxième loi de Newton : $F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r}$ pour le cas du MCU.

D'autre part, la loi de la gravitation Universelle : $F = G\frac{M\,m}{r^2}$

$$⇨ \; m \cdot \frac{v^2}{r} = G\frac{M\,m}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \;\Rightarrow \boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{r}}}$$

En utilisant les notations des données : $\boldsymbol{v_{module}} = \sqrt{\boldsymbol{G} \cdot \frac{\boldsymbol{M_M}}{\boldsymbol{r}}}$

Attention : ne pas oublier que r représente la distance entre le <u>CENTRE</u> de Mars et le module. Le rayon de Mars est de 3 390 000 m.
Donc, la distance $r = 3\,390\,000 + 110\,000 = 3\,500\,000\; m$

$$⇨ \; v_{module} = \sqrt{6{,}67\;10^{-11} \cdot \frac{6{,}42\;10^{23}}{3\,500\,000}} = 3498\frac{m}{s} \approx 3{,}5\; km/s$$

2. Demander que le satellite de communication soit immobile vu depuis une base martienne veut dire qu'il est géostationnaire pour Mars, donc que sa période de révolution soit égale à celle de la période de rotation propre de Mars sur elle-même, soit $24{,}6\; h$.

- Notons T_s ;la période de révolution du satellite (24,6 h) et r_s ; le rayon de l'orbite du satellite, càd $r_s = R_{Mars} + h_s$ où h_s est l'altitude du satellite au-dessus de Mars. La troisième loi de Kepler implique :

$$\frac{T_s^2}{r_s^3} = \frac{T_s^2}{(R_{Mars} + h_s)^3} = \mathcal{K}$$

Le but est de trouver h_s. De l'équation ci-dessus, on a :

$$(R_{Mars} + h_s)^3 = \frac{T_s^2}{\mathcal{K}} \;\Rightarrow \boldsymbol{h_s} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{T_s^2}}{\boldsymbol{\mathcal{K}}}} - \boldsymbol{R_{Mars}}$$

Reste à trouver $\mathcal{K}$ ...

- Etablissons la 3ème loi de Kepler pour le module de la question 1. En effet, le facteur $\mathcal{K}$ sera le même puisque Mars est l'astre attracteur commun au module ET au satellite !

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = \frac{T_m^2}{r_m^3} = \frac{(2\pi r_m)^2}{r_m^3 \cdot v^2} = \frac{4\pi^2}{r_m \cdot v^2} = \frac{4\pi^2}{(3\,500\,000) \cdot (3498)^2} = \boldsymbol{9{,}21\;10^{-13}\; s^2 \cdot m^{-3}}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{h_s} = \sqrt[3]{\frac{T_S^2}{\mathcal{K}}} - R_{Mars} = \sqrt[3]{\frac{(24{,}6 \times 3600)^2}{9{,}21\ 10^{-13}}} - 3\ 390\ 000 = \mathbf{17030758}\ \boldsymbol{m} \approx \mathbf{17\ 000}\ \boldsymbol{km}$$

Retour à l'énoncé

Solution 56 (réf 71)

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = cste$$

1. On isole M_T dans $\frac{T_S^2}{r_S^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

$$\Rightarrow\ M_T = \frac{4\pi^2 \cdot r_S^3}{G \cdot T_S^2} \Leftrightarrow M_T = \frac{4\pi^2 \cdot (42164 \times 10^3)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (86164)^2} = 5{,}976\ 10^{24}\ kg$$

2. a) Comme pour ci-dessus, on isole M_M

- Phobos : $M_{Mars} = \frac{4\pi^2 \cdot r_p^3}{G \cdot T_p^2} \Leftrightarrow M_M = \frac{4\pi^2 \cdot (9380 \times 10^3)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (((7 \times 60)+39) \times 60)^2} = 6{,}44\ 10^{23}\ kg$

- Deimos : $M_{Mars} = \frac{4\pi^2 \cdot r_d^3}{G \cdot T_d^2} \Leftrightarrow M_M = \frac{4\pi^2 \cdot (23460 \times 10^3)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (((30 \times 60)+18) \times 60)^2} = 6{,}42\ 10^{23}\ kg$

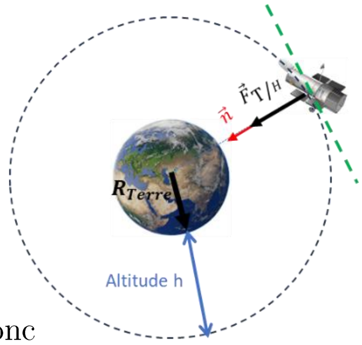
b) Aux erreurs de mesures ou d'observations près, on conclut que l'observation de l'orbite et de la période des 2 satellites de Mars conduisent à une masse de Mars d'environ $6{,}43\ 10^{23}\ kg$. La masse réelle admise actuellement est en effet $6{,}417\ 10^{23} kg$.

3. Comme pour ci-dessus, on isole M_L :

$$M_{Lune} = \frac{4\pi^2 \cdot r_A^3}{G \cdot T_A^2} \Leftrightarrow M_M = \frac{4\pi^2 \cdot (2040 \times 10^3)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (8420)^2} = 7{,}4\ 10^{22}\ kg$$

Retour à l'énoncé

Solution 57 (réf 72)



1. a) $\vec{F}_{T/H} = G \cdot \frac{M_T M_H}{r^2}\,\vec{n}$

b) Au départ, la force recherchée est $F_{T/H} = G \cdot \frac{M_T M_H}{(R_T+h)^2}$ mais on veut cette force en fonction de g_0. Or g_0 n'est rien d'autre que l'accélération subie par une masse due à l'attraction au niveau du sol de la Terre, càd lorsque $h = 0$ et donc lorsque $r = R_T$.

Donc $F = ma = mg_0 = G \cdot \frac{M_T m}{r_T^2} \Rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{r_T^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0\, r_T^2$.

Et finalement : $F_{T/H} = G \cdot \frac{M_T M_H}{(R_T+h)^2} = \frac{g_0 \cdot r_T^2 \cdot M_H}{(R_T+h)^2}$

c) Pour $h = 600\ km$, cela donne numériquement :

$$F_{T/H} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot M_H}{(R_T+h)^2} = \frac{9{,}81 \cdot (6380\ 10^3)^2 \cdot 12103}{(6\ 380\ 000 + 600\ 000)^2} = 99\ 195\ N$$

2. a) La seule force qui existe est celle due à la Gravitation Universelle, laquelle est dirigée vers le centre de la Terre dans le repère de Frenet. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle donc $a = \frac{dv}{dt} = 0$ et donc $v_{tangentielle} = constante$.
On est bien le cadre du MCU (Mouvement Circulaire Uniforme).

b) Pour un MCU,

$$F = M_H a = \frac{M_H v^2}{r} = \frac{M_H v^2}{R_T + h} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot M_H}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + h}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}}$$

Numériquement : $\boldsymbol{v} = 6\ 380\ 000 \cdot \sqrt{\frac{9{,}81}{6\ 380\ 000+600\ 000}} = \mathbf{7563}\,\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}} = 7{,}563\ km/s$

c) Partant de $v = \frac{x}{t}$, on a :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\,(R_T + h)}{R_T}\sqrt{\frac{R_T + h}{g_0}} = 2\frac{\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}$$

$$= \frac{2\pi}{6380\ 10^3} \cdot \sqrt{\frac{(6380\ 10^3 + 600\ 10^3)^3}{9{,}81}} = \mathbf{5\ 798}\ \boldsymbol{m/s}$$

Retour à l'énoncé

Solution 58 (réf 73)

I. 1. Landsat-5 étant un satellite orbitant autour de la Terre, le référentiel est le plus adéquat pour réaliser l'étude de sa trajectoire est le référentiel **géocentrique**.

2. La seule force qui existe est celle due à la Gravitation Universelle, laquelle est dirigée vers le centre de la Terre dans le repère de Frenet. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle donc $a = \frac{dv}{dt} = 0$ et donc $v_{tangentielle} = constante$.

On est bien le cadre du MCU (Mouvement Circulaire Uniforme).

3.

$$F = M_S a = \frac{M_S v^2}{r} = \frac{M_S v^2}{R_T + z} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot M_S}{(R_T + z)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + z}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T + z}}}$$

II. 1. $\boldsymbol{v} = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+z}} = 6380\ 10^3 \cdot \sqrt{\frac{9{,}81}{(6380+705)\cdot 10^3}} = \mathbf{7507}\ \boldsymbol{m/s}$

L'énergie **cinétique** du satellite vaut $E_c = \frac{m_S \cdot v_S^2}{2} = \frac{2000*(7507)^2}{2} = \mathbf{5{,}635\ 10^{10}}\ \boldsymbol{Joules}$

2.

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_{Sat}}{r} = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_{Sat}}{(r_T + z)} = -\frac{6{,}67\ 10^{-11} \cdot 5{,}97\ 10^{24} \cdot 2000}{(6380 + 705) \times 10^3}$$
$$= -1{,}12406\ 10^{11}\ Joules$$

L'énergie mécanique totale vaut donc :

$$E_m = E_c + E_p = 5.635\ 10^{10} - 1.12406\ 10^{11} = -5{,}6 \times 10^{10} Joules$$

3. Rappelons que la vitesse de libération est la vitesse qu'il faut communiquer à un objet de masse m pour qu'il s'éloigne définitivement de l'astre attracteur, la Terre en l'occurrence pour notre problème. D'un point de vue de l'énergie, cela implique de communiquer une vitesse telle que l'énergie cinétique de l'objet de masse

$m, E_c = \frac{mv^2}{2}$, puisse compenser, en valeur absolue, l'énergie potentielle due à l'attraction gravitationnelle, $E_p = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r}$. Soit encore $\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = 0}$

On veut donc :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \left| -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \right| = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r} \Leftrightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{2\ G\ M_T}{r_T}}}$$

où v_l signifie « **vitesse de libération** » et où r_T signifie que c'est la vitesse à communiquer SI on se trouve au niveau du sol.

Cette vitesse vaut :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\ G\ M_T}{r_T}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67\ 10^{-11} \times\ 5{,}97\ 10^{24}}{6380\ 000}} = 11\ 172\,\frac{m}{s} = \boldsymbol{11{,}17\ \frac{km}{s}}$$

Dans le cas de notre satellite qui est déjà en orbite, et donc à une altitude $z = 705\ 000\ m$, cette vitesse sera légèrement inférieure puisqu'il possède déjà une énergie telle qu'il gravite à une certaine altitude $\boldsymbol{z}$. Dans son cas, sa vitesse de libération sera :

$$v_{l_s} = \sqrt{\frac{2\ G\ M_T}{(r_T + z)}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67\ 10^{-11} \times\ 5{,}97\ 10^{24}}{6380\ 000 + 705\ 000}} = 10602\,\frac{m}{s} = 10{,}6\,\frac{km}{s}$$

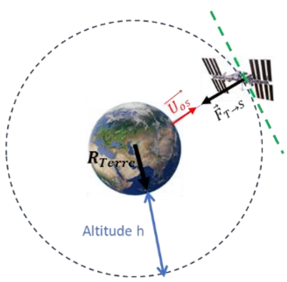
Notez bien que les vitesses de libération ne dépendent jamais de la masse de l'objet ! Que vous souhaitiez envoyer à l'infini une bille ou un éléphant ne change rien à la vitesse qui faut lui communiquer. Par contre, bien sûr, l'énergie à fournir va elle, bien dépendre de la masse.

Dans le cas de notre satellite, **partant du sol**, l'énergie à fournir pour l'éloigner à l'infini sera $E_c = \frac{m_s v_l^2}{2} = \frac{2000 \times (11170)^2}{2} = 1{,}25\ 10^{11}\ Joules.$

Retour à l'énoncé

Solution 59 (réf 74)

I. 1. a)



b) La force d'attraction est : $\vec{F}_{T \to S} = -\ G \cdot \frac{M_T M_S}{(R_T + h)^2}\ \vec{U}_{os}$

Or, $\vec{F}_{T\to S} = M_s\vec{a} = M_s\vec{g}(h)$ dans le cas de force d'attraction :

Donc : $\vec{g}(h) = -\,G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{U}_{os}$

Or g_0 n'est rien d'autre que l'accélération subie par une masse due à l'attraction au niveau du sol de la Terre, càd lorsque $h = 0$ et donc lorsque $r = R_T$

$$\Rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0 R_T^2$$

Et finalement : $\vec{g}(h) = -g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}\,\vec{U}_{os}$, ce qui donne en valeur absolue :

$$\boxed{g(h) = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}}$$

2. La seule force existante est la force d'attraction : $\vec{F}_{T\to S} = -\,G \cdot \frac{M_T M_s}{(R_T+h)^2}\,\vec{U}_{os}$.

Or, la deuxième loi de Newton stipule : $\vec{F}_{T\to S} = M_s\vec{a}$

Donc, $\vec{a} = -\,G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{U}_{os}$ est dirigée vers le centre (accélération centripète) et est la seule accélération en jeu. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle : $\vec{a}_t = 0 = \frac{d\vec{v}_t}{dt} \Rightarrow \vec{v}_t$ est constante et on est donc bien dans le cadre du mouvement circulaire uniforme (MCU).

3. Dans le cadre du MCU : $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$. Or, comme vu au point (1) ci-dessus, $a = g(h) = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$. Donc : $\frac{v^2}{R_T+h} = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}}$.

Ensuite : $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}}$

Finalement, $\boldsymbol{\omega} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}} = \boldsymbol{R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{(R_T+h)^3}}}$

II. 1.

A l'aide des expressions obtenues à la question ci-dessus et pour $h = 7{,}8\;10^5\;km$, on a :

- $\boldsymbol{v} = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}} = 6380 \times 10^3 \cdot \sqrt{\frac{9{,}8}{6380\;10^3 + 7{,}8\;10^5}} = \boldsymbol{7464\,\frac{m}{s}}$
- $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{6380\,000} \cdot \sqrt{\frac{(6380000+780000)^3}{9{,}8}} = 6027\;s$
- $\boldsymbol{\omega} = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{(R_T+h)^3}} = 6380000 \cdot \sqrt{\frac{9{,}8}{(6380000+780000)^3}} = 1{,}042\;10^{-3}\;rad/s$

2. Le satellite se déplace dans le même sens que la terre.
Attention … piège ! On demande précisément la durée qui sépare deux passages successifs du satellite à la **verticale d'un point donné** de l'Equateur.
Dès lors, cette durée n'est pas simplement la période du satellite mais cela doit être supérieur puisqu'entretemps … la Terre elle aussi a tourné dans le même sens !
Après avoir effectué un angle de $2\pi\, rad$, le satellite doit **encore** effectuer une portion d'angle égale à l'angle balayé par la Terre (suite à sa rotation propre), avant de se retrouver à la verticale de référence du départ.
Appelons $\theta_T(t)$, l'angle balayé par la Terre pendant un temps t, et $\theta_S(t)$ l'angle balayé par le satellite ce même temps t.
L'angle $\Delta\theta$ parcouru en plus de 2π par le satellite pour rejoindre la verticale du point de départ vaut $\theta_S(T') - 2\pi$, càd l'angle TOTAL balayé par le satellite pendant un temps T' (qu'on recherche !) auquel on soustrait 1 tour pour ne garder que la différence. Cet angle est par définition égal à l'angle balayé par la Terre en un temps T', soit au final : $\theta_S(T') - 2\pi = \theta_T(T')$.
Or, en toute généralité, $\theta = \omega \cdot t,$ donc

$$\theta_S(T') - 2\pi = \theta_T(T') \Leftrightarrow \ \omega_S \cdot T' - 2\pi = \omega_T \cdot T' \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{\omega_S - \omega_T}$$

$$\Leftrightarrow \ T' = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_s} - \frac{2\pi}{T_T}} = \frac{T_s \cdot T_T}{T_T - T_S} = \frac{6027 \cdot 86400}{86400 - 6027} = 6478\ s$$

Cette réponse est bien cohérente puisque le satellite doit continuer son parcours pendant $(6478 - 6027)s = 451s = 7{,}5\ min$ en plus de son tour de 360 ° afin de repasser au même endroit qu'au temps $t = 0$ puisque la Terre a elle-même tourné (mais beaucoup moins vite que le satellite !).

III. 1. Un satellite géostationnaire est un satellite dont l'orbite est dans le plan équatorial, tourne dans le même sens que la Terre, et apparait immobile à un observateur terrestre. C'est donc un satellite qui a la même vitesse de rotation que celle de la terre.

2. Nous avons vu en (I) que : $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}}$.
T est la période du satellite, mais qui doit être, par définition égale à celle du satellite géostationnaire. Reste donc à isoler h !

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}} \Leftrightarrow (R_T + h)^3 = g_0 \cdot \frac{T^2 \cdot R_T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow R_T + h = \sqrt[3]{g_0 \cdot \frac{T^2 \cdot R_T^2}{4\pi^2}}$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{g_0 \cdot \frac{T^2 \cdot R_T^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{9{,}8 \cdot \frac{(86400)^2 \cdot (6380\ 10^3)^2}{4\pi^2}} - 6380\ 10^3$$
$$= 35871\ 10^3 m \approx 35800\ km$$

IV. 1. Nommons h_0 l'altitude nominale (780 km) et h_i, l'altitude après le $i^{ème}$ tour, jusqu'à arriver à h_n , l'altitude atteinte après le $n^{ème}$ tour, soit 400 km.

On nous dit : $h_1 = h_0 - \frac{1}{1000}\ h_0 = h_0\left(1 - \frac{1}{1000}\right) = 0{,}999\ h_0$

$$\Rightarrow h_2 = h_1 - \frac{1}{1000}\ h_1 = 0{,}999\ h_1$$

On voit donc clairement que : $\boxed{\boldsymbol{h_{i+1} = 0,999\ h_i}}$

2. Ci-dessus, on voit que $h_2 = h_1 - \frac{1}{1000}\ h_1 = 0{,}999\ h_1 = (0{,}999) \cdot (0{,}999) h_0$
$= (0{,}999)^2\ h_0$

On voit donc rapidement que $\boxed{\boldsymbol{h_n = (0,999)^n \cdot h_0}}$

3. On a donc : $400 = (0{,}999)^n \cdot 780 \ \Leftrightarrow 0{,}999^n = \frac{400}{780} \Leftrightarrow \ln(0{,}999^n) = \ln\left(\frac{400}{780}\right)$

$$\Leftrightarrow n \ln(0{,}999) = \ln\left(\frac{400}{780}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{n} = \frac{\ln\left(\frac{400}{780}\right)}{\ln(0{,}999)} = \boldsymbol{667\ tours}$$

Retour à l'énoncé

Solution 60 (réf 75)

1. D'une part, la force de gravitation entre le satellite (masse m) et la Terre (masse M) est une force dirigée vers la Terre qui vaut $\vec{F}_{T/S} = \frac{GMm}{r^2}\ \vec{n}$ où $\vec{n}$ est dirigé vers le centre de la Terre.
   D'autre part, dans le cours théorique, on démontre que pour une force conservative (notre cas), la variation d'énergie potentielle lorsqu'un objet se déplace de A vers B est égale au travail effectué par la force conservative correspondante, précédé du signe 'moins', càd :

$$U_B - U_A = -W = -\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

   A l'∞, la force d'attraction Terre/objet étant nulle, l'énergie potentielle à l'∞ est aussi nulle. Prenons alors comme référence $E_p(\infty) = 0$ et calculons le travail nécessaire pour amener le satellite (de masse m) de l'∞, à une orbite $\boldsymbol{r}$.

$$U_r - U_\infty = -W = -\int_\infty^r -\frac{GMm}{r^2}\ dr = GMm \int_\infty^r \frac{1}{r^2}\ dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r$$

$$= -\frac{\boldsymbol{GMm}}{\boldsymbol{r}}$$

On conclut donc que l'énergie potentielle à un rayon r vaut :

$$\boxed{U_r = -\frac{GMm}{r}}$$

En ayant posé la référence $E_p(\infty) = 0$

2. L'énergie mécanique vaut : $E_m = E_c + E_p$

   $E_c = \frac{mv^2}{2}$. Or, pour un MCU dans le cadre de la gravitation, on a :

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

   Ci-dessus, on a vu que $E_p = -\frac{GMm}{r}$

   Donc, $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{r} = -\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}}$

3. D'une part : $F = ma = \frac{mv^2}{r} \overset{v=\omega r}{=} \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r$

   D'autre part : $F = \frac{GMm}{r^2}$

   $\Rightarrow \; m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} \; \Leftrightarrow \omega^2 r^3 = GM$

4. Si un satellite parait immobile dans le ciel, c'est qu'il est géostationnaire, càd que sa période égale à la période de la rotation de la Terre, soit 86400 s.

- **Calcul de la hauteur**

  Plusieurs manières de faire : utilisons la formule que nous venons juste de démontrer :

$$\omega^2 r^3 = GM$$

  où $r = R_T + h$ et $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega^2 = 4\frac{\pi^2}{T^2}$

  On a donc :

$$r^3 = (R_T + h)^3 = \frac{GM}{\omega^2} = \frac{GM\,T^2}{4\,\pi^2} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \sqrt[3]{\frac{GM\,T^2}{4\,\pi^2}} - R_T$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\,(86400)^2}{4\,\pi^2}} - 6380 \times 10^3 = \mathbf{35870}\ \boldsymbol{km}$$

- **Calcul de la vitesse**

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(35870 + 6380) \times 10^3}{86400} = 3072\,\frac{m}{s} = 3{,}072\,\frac{km}{s}$$

- **Calcul de l'énergie totale**

A la question (2) ci-dessus, nous avons calculé cette énergie totale (ou mécanique – c'est la même chose en mécanique) :

$$E_m = E_c + E_p = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

Donc $E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}\cdot68}{(35870+6380)\times10^3} = -3.11\times10^8\,Joule$

Note/rappel : Le signe « - » n'est pas une erreur. Il justifie justement que le satellite est « lié » à la Terre, càd en orbite. Si le signe de l'énergie était positif, cela signifierait une orbite dite « ouverte » , comme par exemple des comètes à orbite hyperbolique qui ne passent qu'une seule fois puis disparaissent…

5. Rappelons que la vitesse de libération est la vitesse qu'il faut communiquer à un objet de masse m pour qu'il s'éloigne définitivement de l'astre attracteur, la Terre en l'occurrence pour notre problème. D'un point de vue de l'énergie, cela implique de communiquer une vitesse telle que l'énergie cinétique de l'objet de masse m, $E_c = \frac{mv^2}{2}$, puisse compenser, en valeur absolue, l'énergie potentielle due à l'attraction gravitationnelle, $E_p = -G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r}$. Soit encore $\boldsymbol{E_m = E_c + E_p = 0}$

   On veut donc :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \left|-G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r}\right| = G\cdot\frac{M_T\cdot m}{r} \Leftrightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{r_T}}}$$

   où v_l signifie « **vitesse de libération** » et où r_T signifie que c'est la vitesse à communiquer SI on se trouve au niveau du sol.

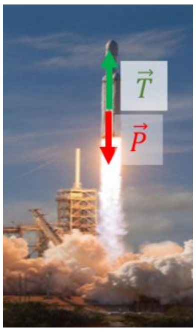
   Cette vitesse vaut :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{r_T}} = \sqrt{\frac{2\times6{,}67\,10^{-11}\times\,5{,}97\,10^{24}}{6380\,000}} = 11\,172\,\frac{m}{s} = \boldsymbol{11{,}17\,\frac{km}{s}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 61 (réf 76)

I. Etude de la phase de lancement



1. Au moment du décollage, interviennent essentiellement 2 forces : le poids $\vec{P}$ de la fusée et la force $\vec{T}$ de la poussée (T pour 'Thrust' = poussée en anglais afin de ne pas confondre avec P de 'poids')

2. Posons l'axe $\overrightarrow{Oz}$, vertical et dirigé vers le haut, on a alors :

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Comme on est le long d'un seul axe si l'on tient compte de la direction des vecteurs, on peut omettre les 'flèches de vecteurs'. On alors :

$$T - mg = ma \Rightarrow a = \frac{T - mg}{m}$$

Pour que la fusée décolle, il faut évidemment que la poussée soit supérieure au poids, càd que $|T| > |F| \;\Leftrightarrow T > mg \;\Leftrightarrow\; T - mg > 0 \;\Leftrightarrow\; a > 0$

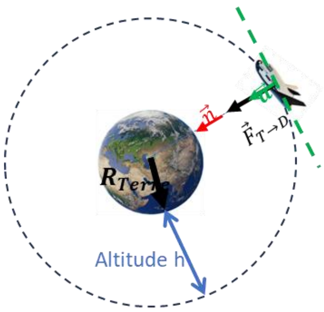
$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{3{,}24\ 10^7 - 2{,}041\ 10^6 \times 9{,}8}{2{,}041\ 10^6} = 6{,}16\ m/s^2$$

3. Négligeant les variations d'accélération, on est dans le cadre du MRUA, soit $z = \frac{at^2}{2}$.

Après 2 secondes, la fusée aura parcouru $\boldsymbol{z} = \frac{at^2}{2} = \frac{6{,}16\times 2^2}{2} = \mathbf{12{,}32\ m}$

II. Etude de Discovery en orbite autour de la Terre

1. Le vecteur accélération est dirigé vers le centre de la Terre.
Il s'agit d'une accélération centripète.



2. La force d'attraction est : $\vec{F}_{T\to D} = G \cdot \frac{M_T M_D}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$

Or, $\vec{F}_{T\to D} = M_D\vec{a} = M_D\vec{g}(h)$ dans le cas de force d'attraction :

Donc : $\vec{g}(h) = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$

Or g_0 n'est rien d'autre que l'accélération subie par une masse due à l'attraction au niveau du sol de la Terre, càd lorsque $h = 0$ et donc lorsque $r = R_T$

$$\Rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0 R_T^2$$

Et finalement : $g\,(h) = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$

3. Pour $h = 296\ km$,

$$g\,(h) = g_0\,\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{g\,(296\,km)} = 9{,}8\,\frac{\left(6380\times 10^3\right)^2}{\left((6380+296)\times 10^3\right)^2}$$
$$= \boldsymbol{8{,}95\,m/s^2}$$

3. Partant de $F = ma = mg(h)$ d'une part et,
$F = ma = \frac{mv^2}{r}$ pour un MCU , d'autre part, on a alors :

$$mg(h) = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = g(h).r \Leftrightarrow v = \sqrt{g(h)\cdot r}$$

Or, $r = R_T + h$, d'où $\boldsymbol{v = \sqrt{g(h)\cdot(R_T+h)}}$

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{g(h)\cdot(R_T+h)} = \sqrt{8{,}95\cdot(6380+296)\,10^3} = 7729\,\frac{m}{s} = \boldsymbol{7{,}729\,\frac{km}{s}}$$

III. Etude de la phase d'approche à, l'atterrissage

1. Dans cette question, le signe du travail du poids dans un potentiel généré par la force gravitationnelle est très souvent source de confusion. J'ai l'habitude, pour faire simple, de le calculer tout d'abord en valeur absolue et d'attribuer le signe en fin de calcul, selon que l'objet se déplace dans le sens de la force (+, travail moteur) ou opposé à la force (-, travail résistif) …

$Date$	$Altitude\,(en\,km)$	$Vitesse\,(en\,m/s)$
$T_1 = t - 8\,min$	54,86	1475
$T_2 = t - 3\,min$	11,58	223,5

L'énergie potentielle de la navette à l'altitude élevée h_1 vaut : $E_{h_1} = -\frac{GMm}{R_T+h_1}$.

À l'altitude basse h_2, elle vaut : $E_{h_2} = -\frac{GMm}{R_T+h_2}$.

Le travail du poids, qui n'est autre que la différence d'énergie potentielle vaut donc, sans se préoccuper du signe :

$$|W| = |\Delta E_p| = |E_{h_1} - E_{h_2}| = -\frac{GM_Tm}{R_T+h_1} + \frac{GM_Tm}{R_T+h_2} = GM_Tm\cdot\left(\frac{1}{R_T+h_2} - \frac{1}{R_T+h_1}\right)$$
$$\overset{question\ II.2}{=} g_0R_T^2m\cdot\left(\frac{1}{R_T+h_2} - \frac{1}{R_T+h_1}\right)$$
$$= 9{,}8\cdot(6380\,10^3)^2\cdot 6{,}968\,10^4\cdot\left(\frac{1}{(6380+11{,}58)10^3} - \frac{1}{(6380+54{,}86)10^3}\right)$$
$$= 2{,}925\,10^{10} Joules$$

Quant au signe, il reste bien positif car au final, la navette va dans le sens de la force d'attraction, càd qu'elle est naturellement attirée vers la Terre, c'est donc ce qu'on appelle un travail moteur.

⇨ $W_{poids} = +2{,}925\,10^{10} Joules$

2. Pour rappel, le théorème de l'énergie cinétique est la traduction mathématique de l'affirmation « l'énergie se conserve ». Il énonce que, **si l'énergie cinétique du système varie, cela est forcément dû à un transfert par travail avec l'extérieur. Il ne peut pas avoir « produit de l'énergie »**

Dans notre cas, les vitesses étant différentes selon l'altitude, les énergies cinétiques $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, pour un même poids, sont forcément différentes. Le théorème nous indique qu'il y a forcément eu transfert par travail avec l'extérieur. Et en effet, on vient de calculer ci-dessus une première cause : le travail dû au poids W_p. Reste donc à calculer le travail dû au frottement W_f. Le théorème nous indique que :

$$\Delta E_c = W_p + W_f \quad \Rightarrow W_f = \Delta E_c - W_p$$

Donc,

$$W_f = \Delta E_c - W_p = 69{,}68\frac{10^3}{2}\left(223{,}5^2 - 1475^2\right) - 2{,}925\ 10^{10} = -1{,}032 \times 10^{11} Joules$$

Notons finalement qu'on peut calculer cette force de frottement puisque $W = F \cdot \Delta h$.

D'où : $\boldsymbol{F} = \frac{W}{\Delta h} = \frac{-1{,}032\times10^{11}}{11580-54860} = \mathbf{2{,}38 \times 10^6 N}$

Retour à l'énoncé

Solution 62 (réf 77)

1. Posons que le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur qui relie le satellite au centre de la Terre et dirigé VERS le centre de la Terre. La force d'attraction est alors :

$$\vec{F}_{T\to S} = G \cdot \frac{M_T M_S}{r^2}\vec{n} = G \cdot \frac{M_T M_S}{(R_T + h)^2}\ \vec{n}$$

Or, $\vec{F}_{T\to S} = M_S\vec{a} = M_S\vec{g}$ dans le cas de force d'attraction :

Donc : $\boxed{g(h) = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}}$

Or g_0 n'est rien d'autre que l'accélération subie par une masse due à l'attraction au niveau du sol de la Terre, càd lorsque $h = 0$ et donc lorsque $r = R_T$

$$\Rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0 R_T^2$$

Et finalement : $\boxed{g\ (h) = g_0\ \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}}$

2. La seule force qui existe est celle due à la Gravitation Universelle, laquelle est dirigée vers le centre de la Terre dans le repère de Frenet. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle donc $a = \frac{dv}{dt} = 0$ et donc $v_{tangentielle} = constante.$

On est bien le cadre du MCU (Mouvement Circulaire Uniforme).

3. Dans le cadre du MCU : $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$. Or, comme vu au point (1) ci-dessus,

$a = g(h) = g_0 \, \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$. Donc : $\frac{v^2}{R_T+h} = g_0 \, \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}}$.

Ensuite : $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}}$

4. A l'aide des expressions obtenues à la question ci-dessus et pour $h = 200\ km$, on a :

- $\boldsymbol{v} = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}} = 6400 \times 10^3 \cdot \sqrt{\frac{9{,}8}{6\,400\,000+200000}} = \boldsymbol{7798\,\frac{m}{s}}$
- $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{6400\,000} \cdot \sqrt{\frac{(6\,400\,000+200\,000)^3}{9{,}8}} = 5317\ s$

5. a) Il faut qu'il orbite dans le plan équatorial ET avec une période de révolution égale à celle de la Terre ET qu'il tourne dans le même sens que la rotation de la Terre, de sorte qu'il apparait immobile pour un observateur terrestre.

b) Partons de $T = \frac{x}{v} = 2\frac{\pi r}{v}$ (1)

D'autre part :

$F = m_s a \overset{MCU}{=} \frac{m_s v^2}{r}$ et aussi : $F = G \cdot \frac{M_T\, m_s}{r^2}$

$$\Rightarrow \frac{m_s\, v^2}{r} = G \cdot \frac{M_T\, m_s}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}} \qquad (2)$$

(1) et (2) ➔ $T = 2\frac{\pi r}{v} = 2\frac{\pi r}{\sqrt{G \cdot \frac{M_T}{r}}} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\,\pi^2 r^2\, r}{G \cdot M_T} \Leftrightarrow r^3 = \frac{T^2 G M_T}{4\pi^2} \Leftrightarrow (R_T + h)^3 = \frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}$

$$\Leftrightarrow R_T + h = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_T}{4\pi^2}} - R_T$$

Si M_T n'est pas donné ou que vous ne vous en souvenez plus, on peut aussi utiliser le fait que g_0 est l'accélération au niveau du sol de la Terre R_T, càd, pour $\boldsymbol{h = 0}$. D'où :

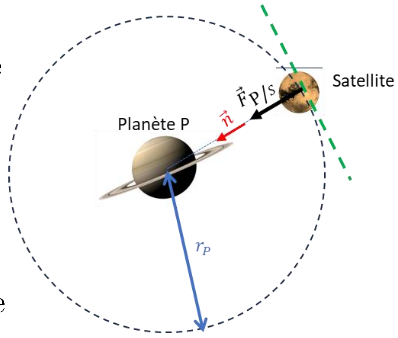
$$F = ma = mg_0 = \frac{GM_T m}{R_T^2} \Rightarrow G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{h} = \sqrt[3]{\frac{T^2\, g_0\, R_T^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{(8{,}64 \times 10^4)^2 \cdot 9{,}8 \cdot (6400 \times 10^3)^2}{4\pi^2}} - 6400 \times 10^3$$

$$= 3{,}57 \times 10^7 m \approx \boldsymbol{35700\ km}$$

Retour à l'énoncé

Solution 63 (réf 78)



1. La force de gravitation exercée par la planète P sur le satellite S est radiale et centripète, dirigée vers la Planète P.
Son intensité est donnée par $\vec{F} = G \cdot \frac{M_p \cdot M_S}{r^2}\,\vec{n}$

1. Posons que le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur dirigé du satellite VERS le centre de la Terre , la force d'attraction est alors :

$$\vec{F}_{T\to S} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}\vec{n} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)^2}\,\vec{n}$$

Or, $\vec{F}_{T\to S} = ma\,\vec{n} = m\,g(h)\,\vec{n}$ dans le cas de force d'attraction :

Donc : $\boxed{g(h) = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}}$

2. La seule force qui existe est celle due à la Gravitation Universelle, laquelle est dirigée vers le centre de la Terre dans le repère de Frenet. Il n'y a donc pas d'accélération tangentielle donc $a = \frac{dv}{dt} = 0$ et donc $v_{tangentielle} = constante.$
On est donc dans le cadre du MCU (Mouvement Circulaire Uniforme).

4. On part de la deuxième loi de Newton : $F = M_s \cdot a = M_s \cdot \frac{v^2}{r}$ pour le cas du MCU.
D'autre part, la loi de la gravitation Universelle : $F = G\frac{M_p\,M_s}{r^2}$

$$M_s \cdot \frac{v^2}{r} = G\frac{M_p\,M_s}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M_p}{r} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v = \sqrt{G \cdot \frac{M_p}{r}}}}$$

Etant donné que $T = \frac{2\pi r}{v}$, alors $T = \frac{2\pi r}{\sqrt{G \cdot \frac{M_p}{r}}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_p}}}$

Il faut montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante

En effet, on vient de voir que $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_p}}$ donc, que $T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM_p}$.

D'où : $\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = 4\frac{\pi^2}{G \cdot M_p} = constante}$

5. On vient de calculer (4) que $T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM_p}$. On isole M_p.

$$\Rightarrow \boldsymbol{M_p} = 4\pi^2 \frac{r^3}{GT^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{(185{,}5 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^3 \cdot (22{,}6 \times 3600)^2} = \mathbf{5{,}70 \times 10^{26} kg}$$

6. On connait maintenant $M_p = 5{,}7\ 10^{26} kg$ et $T = 108{,}4 \times 3600\ s = 390240\ s$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM_p} \Rightarrow r^3 = \frac{T^2 G M_p}{4\ \pi^2} = \frac{(390240)^2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}7\ 10^{26} kg}{4\ \pi^2}$$
$$= 1{,}46\ 10^{26}\ m^3$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{r} = \sqrt[3]{1{,}46\ 10^{26}} = 527\ 353\ 104\ m \approx \mathbf{527\ 000\ km}$$

Retour à l'énoncé

Solution 64 (ref 79)

1. Posons que le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur dirigé du centre de la Terre VERS le satellite
La force d'attraction est alors :

$$\vec{F}_{T\to S} = -\ G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{n} = -\ G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2}\ \vec{n}$$

Or, $\vec{F}_{T\to S} = ma\,\vec{n} = m\ g(h)\ \vec{n}$ dans le cas de force d'attraction :

Donc : $\boxed{g(h) = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}}$

Or g_0 n'est rien d'autre que l'accélération subie par une masse due à l'attraction au niveau du sol de la Terre, càd lorsque $h = 0$ et donc lorsque $r = R_T$

$$\Rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0 R_T^2$$

Et finalement : $\boxed{g\ (h) = g_0\ \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}}$

2. Dans le cadre du MCU : $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$. Or, comme vu au point (1) ci-dessus,

$a = g(h) = g_0\ \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$. Donc : $\frac{v^2}{R_T+h} = g_0\ \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}}$.

Ensuite : $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}}$

L'énergie cinétique vaut $\boldsymbol{\varepsilon_c} = \frac{mv^2}{2} = \boldsymbol{\frac{mR_T^2\,g_0}{2(R_T+h)}}$

Numériquement : $\boldsymbol{\varepsilon_c} = \frac{mR_T^2\,g_0}{2(R_T+h)} = \frac{1020 \times (6400 \cdot 10^3)^2 \times 9{,}8}{2(6400000+400000)} = 3 \times 10^{10}\ Joules$

3. Le grand principe général est que pour un champ de force qui ne dépend pas du temps (le cas du champ gravitationnel), on a $\vec{F} = -\vec{\nabla}\, U$, ce qui à ce niveau d'étude peut se simplifier en $\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$ et se dit en français : **une force dérive d'un potentiel**.

Soit aussi :

$$W = \Delta E_p = -\int_{position_{initiale}}^{position_{finale}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Dans notre cas, la force vaut $\vec{F} = -\frac{GM_T m}{r^2}\,\vec{n}$, considérant que $\vec{n}$ est dirigé du centre de la Terre VERS le satellite. On peut choisir la position initiale du satellite comme étant à l'infini, là où l'énergie potentielle est nulle car l'influence du champ de force sur le satellite est nul, et la position finale, $r = R_T + h$, là où on positionne le satellite sur son orbite.

Alors :

$$W = \Delta E_p = -\int_{position_{initiale}}^{position_{finale}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = GM_T m \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} \cdot dr = GM_T m \left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{GM_T m}{r}$$

$$= -\frac{GM_T m}{R_T + h}$$

$$\Rightarrow E_p(r) = -\frac{GM_T m}{R_T + h}\ (car\ E_p(\infty) = 0)$$

Or, on a vu en (1) que $G \cdot M_T = g_0 R_T^2$, donc : $\boldsymbol{E_p(r) = -\frac{m\, g_0\, R_T^2}{R_T + h}}$

Le signe **négatif** de l'énergie potentielle indique qu'il y a une force d'attraction entre les deux masses et qu'il faut de l'énergie pour arriver à un potentiel de zéro. En effet, si je veux ramener le satellite à l'infini, là où le potentiel est nul, il va falloir que je lutte contre la force de gravitation et que j'apporte de l'énergie à ce satellite. Une autre manière de le comprendre est de constater que si l'énergie potentielle est négative, c'est parce qu'il y a eu une perte d'énergie potentielle qui s'est traduite par une diminution de la hauteur d'un objet.

L'énergie mécanique vaut la somme de l'énergie cinétique + énergie potentielle, donc :

$$E = E_c + E_p = \frac{mR_T^2\, g_0}{2(R_T + h)} - \frac{m\, g_0\, R_T^2}{R_T + h} = -\frac{1}{2}\frac{m\, g_0\, R_T^2}{R_T + h}$$

Ici, le signe négatif exprime que le satellite est « lié » à la Terre et qu'il orbite autour de celle-ci.

On constate donc que $\boldsymbol{E = \frac{1}{2} E_p}$; $\boldsymbol{E = -E_c}$; $\boldsymbol{E_c = -\frac{1}{2} E_p}$

4. Synthétisons les résultats obtenus ci-dessus :

- $E_p = -\frac{GMm}{r} = -6 \times 10^{10} Joule$
- $E_c = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = 3 \times 10^{10} Joule$
- $E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} = -3 \times 10^{10} Joule$

Et $E = \frac{1}{2}E_p$; $E = -E_c$; $E_c = -\frac{1}{2}E_p$

b) Puisque $E = \frac{1}{2}E_p$, on a $E_p = 2\,E$ et donc $\Delta E_p = 2\,\Delta E = 10^9 J$.

La nouvelle énergie potentielle finale vaut donc

$$\boldsymbol{E_{p_f}} = E_p + 10^9\,Joule = -6 \times 10^{10} J + 10^9 J = \boldsymbol{-5,9 \times 10^{10}}\,Joule$$

On a donc augmenté l'énergie potentielle, càd, qu'elle est moins négative qu'avant et donc, indique que l'orbite va s'éloigner (l'énergie potentielle nulle étant à l'infini).

Puisque $E_p(r) = -\frac{m\,g_0\,R_T^2}{R_T+h}$, on a :

$$\boldsymbol{h} = -\frac{m\,g_0\,R_T^2}{E_p} - R_T = \frac{1020 \cdot 9{,}8 \cdot (6400\,10^3)^2}{5{,}9 \times 10^{10}} - 6400\,10^3 \approx \boldsymbol{540\,km}$$

a) Puisque $E_c = -\frac{1}{2}E_p$, alors $E_c = -\frac{1}{2} \times -5{,}9 \times 10^{10} = 2{,}95\,10^{10} Joule$

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{E_c}{m}} = \sqrt{2\frac{2{,}95\,10^{10}}{1020}} = 7{,}6\,km/s$$

En conclusion, l'orbite augmente (de 140 km) et la vitesse diminue.

Retour à l'énoncé

Solution 65 (ref 80)

1. a) À une altitude r quelconque, on a d'une part pour un MCU : $F = ma = \frac{mv^2}{r}$ et d'autre part la force gravitationnelle $F = \frac{GMm}{r^2}$.

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

Refaisons le même raisonnement au niveau du sol (donc : $r = R$ et $G = g_0$)

D'une part $F = ma = mg_0$ et d'autre part : $F = \frac{GMm}{R^2}$.

$$\Rightarrow mg_0 = \frac{GMm}{R^2} \Leftrightarrow GM = g_0 R^2$$

Finalement : $v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{g_0 R^2}{r} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}}}}$

b) Partant de $v = \frac{2\pi r}{T}$, on a $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{R\sqrt{\frac{g_0}{r}}} = \frac{2\pi}{R} \cdot \sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$

Pour $r = 8000\,km$,

$$T = \frac{2\pi}{6400\ 10^3} \cdot \sqrt{\frac{(8\ 10^6)^3}{9{,}8}} = 7096\ s\ (\approx 2h)$$

2. Partons du travail élémentaire $dw = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr}$. On a alors :

$$dw = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr} \Rightarrow \boldsymbol{w} = \int_R^r \vec{f} \cdot \overrightarrow{dr} = -GMm \int_R^r \frac{1}{r^2}\, dr = -GMm \left[-\frac{1}{r}\right]_R^r = GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$
$$= \boldsymbol{mg_0R^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}$$

Notez que comme $R < r$, $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} < 0$ et $w < 0$. C'est normal ! Le travail de la force gravitationnelle est **résistif** car en élevant un satellite du sol vers l'espace, je dois lutter contre le champ de force !

3. Rappelons que la variation de l'énergie potentielle d'un corps, lorsqu'il est déplacé d'un point à un autre dans un champ de force conservatif (ce qui est le cas de la force gravitationnelle), est égal à l'opposé du travail du champ sur ce corps.

Concrètement, en élevant un corps à une certaine altitude, il gagne en énergie potentielle donc ΔE est positif. Pour élever ce corps, j'ai du lutter CONTRE la force gravitationnelle, j'ai donc effectué un travail résistif, donc négatif. Voilà pourquoi $\Delta E_p = -W \Leftrightarrow W = -\Delta E_p \Leftrightarrow W = -\left(E_p(r) - E_p(R)\right)$.

Or, la référence '0' du potentiel est choisi au niveau du sol dans notre problème, donc $E_p(R) = 0$ et finalement : $W = -E_p(r) \overset{question\ 2}{=} -mg_0R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$

4. L'énergie cinétique du satellite vaut :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} \overset{question\ 1a}{=} \frac{m}{2}\frac{g_0R^2}{r}$$

L'énergie mécanique totale vaut donc :

$$\boldsymbol{E_{Tot}} = E_C + E_p = \frac{m}{2}\frac{g_0R^2}{r} + mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) = mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}\right)$$
$$= \boldsymbol{mg_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)}$$

5. À la question (1a), nous avons trouvé que $v = R\sqrt{\frac{g_0}{r}} = R\sqrt{g_0}\, r^{-\frac{1}{2}}$, d'où :

$$\frac{d}{dr}v = \frac{d}{dr}\left(R\sqrt{g_0}\, r^{-\frac{1}{2}}\right) = R\sqrt{g_0}\frac{d}{dr}r^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}R\sqrt{g_0}r^{-\frac{3}{2}} \qquad (*)$$

D'autre part, à la question (1b), nous avons aussi calculé que :

$$T = \frac{2\pi}{R} \cdot \sqrt{\frac{r^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{R}\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{g_0}} = \frac{2\pi}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_0}\, r^{-\frac{3}{2}}} \Rightarrow \boldsymbol{R\sqrt{g_0}\, r^{-\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{T}}$$

et donc $(*)$ devient :

$$\frac{d}{dr}v = -\frac{1}{2}R\sqrt{g_0}r^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\pi}{T} \Rightarrow \boldsymbol{dv = -\frac{\pi}{T}\, dr}$$

Retour à l'énoncé

Solution 66 (ref 81)

I. L'ascension de la fusée Ariane

1. a) Lorsqu'elle s'élève, la fusée est soumise à son propre poids $\vec{P}$ (vers le bas) et à la poussée des réacteurs que je nomme T (pour 'Thrust'- poussée en anglais), afin de na pas confondre avec le P de «Poids», ou le F de « Force totale » …

b) Partant du principe général $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, on a (en prenant l'axe vertical dirigé vers le haut) :

$$T - P = m_1 a \Leftrightarrow T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow a = \frac{T}{m_1} - g$$

2. a) Au décollage : $m_1 = 208\,000\, kg$; $T = 2\,445\,000\, N$; $g = 9{,}8$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_1} = \frac{T}{m_1} - g \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{2\,445\,000}{208\,000} - 9{,}8 = 1{,}95\, m/s^2$$

b) La masse de la fusée remplie (au décollage) vaut 208 000 kg. La masse de N_2O_4 emportée est de 147 500 kg. Dès lors, la masse de la fusée, une fois tout le péroxyde d'azote consommé est de :

$$m_2 = m_1 - N_2O_4\ emporté = 208\,000 - 147\,500 = 60\,500\, kg$$

A ce moment, l'accélération vaut (pour la même poussée) :

$$\boldsymbol{a_2} = \frac{T}{m_2} - g = \frac{2\,445\,000}{60\,500} - 9{,}8 = 30{,}6\, m/s^2$$

Le mouvement de la fusée n'est bien sûr pas uniformément accéléré puisqu'au fur et à mesure que la masse diminue, l'accélération augmente, vu que la poussée reste constante. On passe de $1{,}95\, m/s^2$ fusée remplie au décollage, à $30{,}6\, m/s^2$ une fois que la fusée a consumé tout son peroxyde d'azote.

3. a) $\overrightarrow{v_E} = \frac{\Delta t}{\Delta m} \cdot \vec{F}$

Au niveau dimensionnel, nous avons :

- $[\Delta t\,] = [\mathrm{T_{emps}}\,]$
- $[\Delta m\,] = [\mathrm{M_{asse}}\,]$

- $[\mathrm{F}] = \left[\mathrm{M_{asse}} \cdot \frac{\mathcal{L}_{ongueur}}{(\mathcal{T}_{emps})^2}\right]$

⇨ $[\overrightarrow{v_E}] = \frac{[\mathrm{T_{emps}}]}{[\mathrm{M_{asse}}]} \cdot \left[\mathrm{M_{asse}} \cdot \frac{\mathcal{L}_{ongueur}}{(\mathcal{T}_{emps})^2}\right] = \left[\frac{\mathcal{L}_{ongueur}}{\mathcal{T}_{emps}}\right] = vitesse\ \left(\frac{m}{s}\right)$

$\overrightarrow{v_E}$ est donc bien une vitesse et s'exprime en $\frac{m}{s}$

b) Lorsque $\Delta t\ (= t_2 - t_1)$ augmente (càd au fur et à mesure que le temps passe), $\Delta m\ (= m_2 - m_1)$ diminue puisque la fusée s'allège en perdant du combustible. Donc, $\Delta t > 0 \Rightarrow \Delta m < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{\Delta t}{\Delta m} < 0}$.

D'autre part, puisque l'axe vertical est dirigé vers le haut, la poussée $\vec{T}$ (vers le haut) est > 0 , donc $\vec{v}_e = \frac{\Delta t}{\Delta m} \cdot \vec{T}$ est négative (càd, dirigée vers le bas).

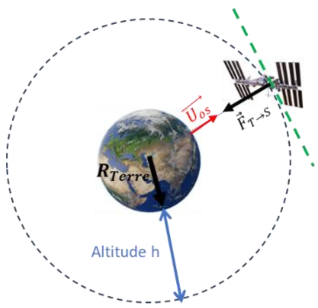
Donc, sans surprise, la vitesse d'éjection du gaz est bien entendu dirigée vers le bas, opposée à la force de poussée.

c) Il s'agit de la 3ème loi de Newton (action-réaction) : les moteurs éjectent le gaz avec une force verticale vers le bas. En conséquence (réaction), ces molécules de gaz exercent une force verticale dirigée vers le haut et de même valeur !

II. Étude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

1. a) Le mouvement étant définit comme circulaire uniforme, cela implique que, dans le repère de Frenet (un vecteur tangentiel et un vecteur normal), la vitesse tangentielle est constante et donc l'accélération $a_t = 0$. Il ne reste qu'une accélération centripète $a_\perp$ (vers le centre de la Terre) selon le vecteur 'normal' dirigé vers le centre de la Terre.

b) Deux masses M_T et m_s placées à une distance r l'une de l'autre, exercent des forces d'attraction opposées, dirigées selon la droite (OS) et dont l'intensité est proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnel au carré de le leur distance. Le coefficient de proportionnalité est la constante universelle de la gravitation, G.



$$\vec{F}_{T\to s} = -\vec{F}_{s\to T} = -G\,\frac{M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2}$$

2. a) Posons que le vecteur $\vec{U}_{OS}$ est le vecteur dirigé du centre de la Terre VERS le satellite La force d'attraction est alors :

$$\vec{F}_{T\to S} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{r^2} \vec{U}_{OS} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{(R_T + h)^2} \vec{U}_{OS}$$

Or, $\vec{F}_{T\to S} = m_s\, a\, \vec{U}_{OS} = m_s\, g(h)\, \vec{U}_{OS}$ dans le cas de force d'attraction :

Donc, l'intensité (en valeur absolue) de $g(h)$, vaut $\boxed{g(h) = G \cdot \frac{M_T}{(R_T+h)^2}}$

Or g_0 n'est rien d'autre que l'accélération subie par une masse due à l'attraction au niveau du sol de la Terre, càd lorsque $h = 0$ et donc lorsque $r = R_T$

$$\Rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_0 R_T^2$$

Et finalement : $\boxed{g\,(h) = g_0\, \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}}$

b) Dans le cadre du MCU : $a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R_T+h}$. Or, comme vu au point (a) ci-dessus, $a = g(h) = g_0\, \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}$. Donc : $\frac{v^2}{R_T+h} = g_0\, \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{v = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}}$.

Ensuite : $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R_T+h)}{R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}}} = \boldsymbol{\frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}}}$

b)

- $\boldsymbol{v} = R_T \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R_T+h}} = 6400 \times 10^3 \cdot \sqrt{\frac{9{,}8}{6400\ 10^3 + 2\ 10^5}} = \boldsymbol{7800\, \frac{m}{s}}$
- $\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{R_T} \cdot \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{g_0}} = \frac{2\pi}{6400\ 000} \cdot \sqrt{\frac{(6400000+200000)^3}{9{,}8}} = 5317\ s$

Retour à l'énoncé

Solution 67 (ref 111)

Note préliminaire : La raison pour laquelle on parle de centre de gravité est parce que qu'on considère que le poids du module est concentré sur ce centre de gravité et que donc, l'astronaute est éloigné de 10 mètres par rapport à la masse de ce module…

Il s'agit donc d'appliquer simplement $F = G\frac{M_m M_a}{r^2}$

On a donc : $F = G\frac{M_m M_a}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{6000 \cdot 70}{(10)^2} = 2{,}8 \times 10^{-7}\ N$

L'accélération de l'astronaute est simplement donnée par $F = m \cdot a$, avec ici :

$$a_a = \frac{F_a}{m_a} = \frac{2{,}8 \times 10^{-7}}{70} \approx 4{,}0 \times 10^{-9}\ m/s^2$$

La force de l'astronaute sur le vaisseau est bien sûr la même que celle du vaisseau sur l'astronaute par principe d'action / réaction (3ème loi de Newton) confirmée par le fait que $F = G\frac{M_m M_a}{r^2}$ est une équation parfaitement symétrique pour les masses $M_a$et M_m.
Par contre, l'accélération du vaisseau dépend bien de sa masse et faut alors :

$$a_{Apollo} = \frac{F_{Apoll}}{m_{Apollo}} = \frac{2{,}8 \times 10^{-7}}{6000} \approx 4{,}7 \times 10^{-11}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 68 (ref 112)

Calculons d'abord la masse de Vénus, sachant que $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V$ et que le volume d'une sphère est donné par $V = \frac{4}{3}\pi \boldsymbol{R}^3$.
Ici : $\rho_V = 5{,}2 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$ et $V_V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\mathbf{12{,}1 \times 10^6}}{\mathbf{2}} m\right)^3$
Et donc $M_V = \rho_V V_V = 5{,}2 \times 10^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\mathbf{12{,}1 \times 10^6}}{\mathbf{2}}\right)^3 \approx 4{,}82 \times 10^{24}\ kg$
Près de sa surface, l'accélération due à la gravitation est donnée par :

$$g_V = \frac{GM_V}{R_V^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{4{,}82 \times 10^{24}}{\left(\frac{12{,}1 \times 10^6}{2}\right)^2} \approx 8{,}79\ m/s^2$$

Et finalement ; on utilise $x = \frac{gt^2}{2}$ pour calculer la distance parcourue par la chute d'un objet en 1 seconde : $x = \frac{gt^2}{2} = 8{,}79 \cdot \frac{(1)^2}{2} \approx 4{,}4\ m$

Retour à l'énoncé

Solution 69 (ref 113)

Sur la Lune, son poids serait : $F_L = \frac{GM_L M_A}{(R_L)^2}$

Sur la Terre, son poids est : $F_T = \frac{GM_T M_A}{(R_T)^2}$

Le rapport des poids est donc :

$$\frac{F_L}{F_T} = \frac{\frac{GM_L M_A}{(R_L)^2}}{\frac{GM_T M_A}{(R_T)^2}} = \frac{M_L}{(R_L)^2} \cdot \frac{(R_T)^2}{M_T} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^2 = 0{,}01230 \cdot \left(\frac{1}{0{,}2731}\right)^2 \approx 0{,}1649$$

Retour à l'énoncé

Solution 70 (ref 114)

Par définition, g_0 est l'accélération au niveau de la surface terrestre, soit :

$$g_0 = \frac{GM_T}{(R_T)^2}$$

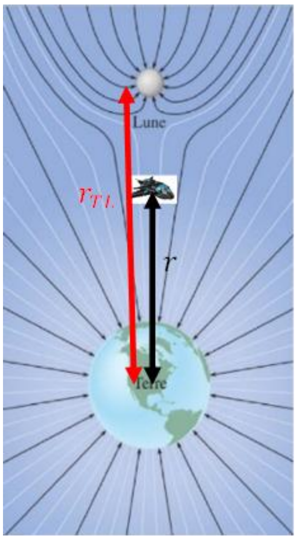
Tandis que l'accélération à une distance quelconque $r \geq R_T$ vaut :

$$g_T(r) = \frac{GM_T}{(r)^2}$$

Dès lors, $\frac{g_{T(r)}}{g_0} = \frac{\left(\frac{GM_T}{(r)^2}\right)}{\frac{GM_T}{(R_T)^2}} = \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$ et donc : $g_{T(r)} = g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$

Retour à l'énoncé

Solution 71 (ref 115)



Posons :

- r_{TL} = distance Terre-Lune
- r = distance Terre vaisseau

Il en découle : distance Lune-vaisseau = $r_{TL} - r$

La force Lune-vaisseau vaut :

$$F_{LV} = \frac{G(M_L M_V)}{(r_{TL} - r)^2}$$

La force Terre-vaisseau vaut :

$$F_{TV} = \frac{G(M_T M_V)}{r^2}$$

La position d'équilibre où les forces s'opposent et où donc, le vaisseau est sans poids est lorsque $F_{LV} = F_{TV}$, càd :

$$\frac{G(M_L M_V)}{(r_{TL} - r)^2} = \frac{G(M_T M_V)}{r^2} \Leftrightarrow \frac{M_L}{(r_{TL} - r)^2} = \frac{M_T}{r^2} \Leftrightarrow \frac{r}{r_{TL} - r} = \frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_L}}$$

$$\Leftrightarrow r\sqrt{M_L} = r_{TL}\sqrt{M_T} - r\sqrt{M_T} \Leftrightarrow r = \frac{r_{TL}\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_L} + \sqrt{M_T}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3{,}844 \times 10^8 \sqrt{5{,}975 \times 10^{24}}}{\sqrt{7{,}35 \times 10^{22}} + \sqrt{5{,}975 \times 10^{24}}} \approx 3{,}46 \times 10^8\ m$$

Retour à l'énoncé

Solution 72 (ref 116)

L'accélération gravitationnelle à la surface de Mars vaut :

$$F_M = G\frac{M_M}{R_M^2}$$

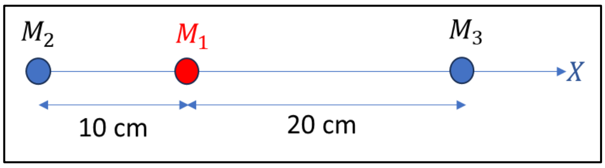
Or, $M_M = 0{,}108\ M_T$ et $R_M = 0{,}534\ R_T$

D'où :

$$F_M = G\frac{M_M}{R_M^2} = G\frac{0{,}108\ M_T}{(0{,}534\ R_T)^2} = G\frac{0{,}108\ M_T}{(0{,}534)^2 \cdot R_T^2} = \frac{0{,}108}{(0{,}534)^2} \cdot g_0 \approx 0{,}379\ g_0$$

Retour à l'énoncé

Solution 73 (ref 117)



M_1 va subir l'attraction des 2 autres masses. On prend par convention que l'axe X est dirigé vers la droite.

Les forces étant vectorielles, l'attraction subie par M_1 est évidemment la somme des 2 attractions vectorielles individuelles.

- La force d'attraction subie par M_1 due à M_2 est : $F = -\ G\frac{(M_1M_2)}{r_{12}^2}$.

Le signe 'moins' vient du fait que M_1va être attirée vers la gauche.

- La force d'attraction subie par M_1 due à M_3 est : $F =\ G\frac{(M_1M_3)}{r_{13}^2}$.

La force totale subie par M_1 est donc :

$$F_{totale\ M_1} = GM_1\left(\frac{M_3}{r_{13}^2} - \frac{M_2}{r_{12}^2}\right) = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 2{,}5 \cdot \left(\frac{6}{0{,}2^2} - \frac{5}{0{,}1^2}\right) \approx -5{,}84 \times 10^{-8}\ N.$$

Notez que c'est cohérent ! En effet, M_2 et M_3 sont très similaires mais, M_1 est deux fois plus proches de M_2. M_1 ressent donc bien plus l'effet de M_1 que de M_2 et est donc bien attirée vers la gauche !

Retour à l'énoncé

Solution 74 (ref 118)

On cherche l'accélération à la surface de l'étoile à neutron.

On nous informe que sa densité vaut $\rho = 3 \times 10^{17}\ kg/m^3$ et que sa masse vaut 1 masse du soleil.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3\,M}{4\,\pi\,\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3\,(1{,}987 \times 10^{30})}{4\,\pi\,(3 \times 10^{17})}} \approx 1{,}165 \times 10^4\ m$$

L'accélération de la pesanteur à la surface d'une étoile à neutrons de masse égale à la masse du Soleil valant : $g_n = \frac{GM_n}{r_n^2}$, on a :

$$g_n = \frac{GM_n}{r_n^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1{,}987 \times 10^{30}}{(1{,}164 \times 10^4)^2} = 9{,}764 \times 10^{11}\ m/s^2$$

Retour à l'énoncé

Solution 75 (ref 119)

Le grand principe de base (expliqué et démontré dans la partie théorie) est qu'à l'**intérieur** d'une coquille sphérique, le champ gravitationnel est NUL. C'est le théorème dit « des coquilles sphériques » ou « théorème de Gauss ».

Dès lors :

- En r_A, seule la force gravitationnelle due à M_3 est ressentie et donc :

$$F_A = \frac{GM_3}{r_A^2}$$

  Aucune force n'est ressentie due à M_1 et M_2

- En r_B, seule la force gravitationnelle due à M_2 et M_3 est ressentie et donc :

$$F_B = \frac{G(M_2 + M_3)}{r_B^2}$$

Pourquoi r_B ? Car les masses sont supposées être concentrées au centre comme pour tous les exercices de ce niveau (sinon, le vrai calcul est trop compliqué – voir le niveau suivant – gravité ceinture noire)

Aucune force n'est ressentie due à M_1

- En r_C, la force gravitationnelle due à M_1, M_2 et M_3 est ressentie et donc :

$$F_B = \frac{G(M_1 + M_2 + M_3)}{r_C^2}$$

Retour à l'énoncé

Solution 76 (ref 120)

Rappelons la 3ème loi de Kepler :
« Pour toutes les planètes, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand-axe est constant », ce qu'on écrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = C\ (Cste)$$

Exprimant T en années terrestres et a en UA (unité astronomique), on a pour la **Terre** :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1\ (année)}{1\ (UA)} = 1$$

Donc, dans les **<u>mêmes unités</u>**(!), on doit avoir, pour **Jupiter :**

$$\frac{T_J^2}{a_J^3} = 1 \Leftrightarrow T_j = \sqrt{a_J^3} = \sqrt{(5{,}2028)^3} \approx 11{,}868 \text{ années terrestres}.$$

Retour à l'énoncé

Solution 77 (ref 121)

Le plus simple est d'exploiter la troisième loi de Kepler en se servant de la Terre pour obtenir la constante qui nous servira à faire le calcul.
Rappelons la 3ème loi de Kepler :
« Pour toutes les planètes, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi grand-axe est constant », ce qu'on écrit :

$$\frac{T^2}{a^3} = C\ (Cste)$$

Dans le cas de la Terre, où a est exprimé en unité astronomique (UA) et vaut donc 1, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1\ (année)}{1\ (UA)} = 1$$

Calculons d'abord 597,9 millions de km en UA afin de garder les mêmes unités !
$1\ UA = 1{,}495 \times 10^{11}\ m$, donc, $597.9 \times 10^9\ m = 3{,}999\ UA.$

Puisque l'astre attracteur pour le satellite est aussi le Soleil, la constante vaut 1 également et donc :

$$T_s^2 = 1 \cdot (3{,}999)^3 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{T_s} = \sqrt{(3{,}999)^3} = \boldsymbol{7{,}998\ années.}$$

Retour à l'énoncé

Solution 78 (ref 122)

Partons de la force gravitationnelle d'un corps de masse m orbitant autour d'un astre de masse M : $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$.

La force centripète nécessaire pour maintenir ce corps en orbite vaut : $F_c = \frac{mv^2}{r}$.

Les deux forces étant égales, on a : $G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

Pour une révolution complète, on a $v = \frac{x}{t} \overset{1\ tour}{=} \frac{2\pi r}{\tau} \Rightarrow v^2 = 4\frac{\pi^2 r^2}{\tau^2}$

Égalant les deux expressions de v^2, on obtient : $\frac{GM}{r} = 4\frac{\pi^2 r^2}{\tau^2} \Leftrightarrow \frac{\tau^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{GM} \Leftrightarrow \frac{r^3}{\tau^2} = \frac{GM}{4\,\pi^2}$

Or, la troisième loi de Kepler exprime justement que pour une orbite circulaire :

$$\frac{r^3}{\tau^2} = C\ (constante).$$

Donc, $C = \frac{GM}{4\,\pi^2} \Rightarrow \frac{C}{M} = \frac{G}{4\,\pi^2} =$

Retour à l'énoncé

Solution 79 (ref 123)

a) Considérons d'abord les forces sur m_1 . Alors :

$$F_1 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}$$

Et comme m_1 tourne autour de O: $F_{c1} = \frac{m_1v_1^2}{r_1} = \frac{m_1}{r_1}\left(\frac{2\pi r_1}{T_1}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}$

Considérons ensuite les forces sur m_2 . Alors :

$$F_2 = \frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2}$$

Et comme m_2 tourne autour de O: $F_{c2} = \frac{m_1v_2^2}{r_2} = \frac{m_1}{r_2}\left(\frac{2\pi r_2}{T_2}\right)^2 = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}$

On voit que $F_1 = F_2$, or $F_1 = F_{C1}$ et $F_2 = F_{C2}$ donc $F_{C1} = F_{C2}$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2} \overset{T_1=T_2}{\Longleftrightarrow} m_1r_1 = m_2r_2 \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

b) Comme $F_1 = F_{c1}$: $\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$ (1)

De même : $F_2 = F_{c2}$: $\frac{Gm_1m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2} \Leftrightarrow \frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$ (2)

Sommons membre à membre (1) et (2) :

$$\frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2}+\frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2}=\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}+\frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$$

$$\overset{T_1=T_2=T}{\Longleftrightarrow}\ \frac{Gm_2}{(r_1+r_2)^2}+\frac{Gm_1}{(r_1+r_2)^2}=\frac{4\pi^2 r_1}{T^2}+\frac{4\pi^2 r_2}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(m_1+m_2)}{(r_1+r_2)^2}=\frac{4\pi^2(r_1+r_2)}{T^2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{(r_1+r_2)^3}{T^2}=\frac{G(m_1+m_2)}{4\,\pi^2}}$$

Retour à l'énoncé

Solution 80 (ref 124)

La distance moyenne au Soleil est bien sûr la moyenne arithmétique de l'aphélie et du périhélie, soit :

$$< r_i > = \frac{(1{,}97+0{,}186)}{2}\ UA = 1{,}078\ UA$$

On utilise la troisième loi de Kepler. Il est capital de retenir que dans un système donné $\frac{T^2}{a^3}=constante.$

En particulier, dans le système solaire et prenant la Terre comme référence, on a $\frac{T^2}{a^3}=1$ en prenant $T=1\ \boldsymbol{an}$ et $a=1\ \boldsymbol{UA}$. Donc, <u>dans les mêmes unités</u>, $\frac{T^2}{a^3}=1$ pour toutes les planètes ou objets orbitant autour de la Terre.

Dans ce problème : $a=1{,}08\ UA \Rightarrow a^3=1{,}2527$

Donc, $\frac{T^2}{a^3}=1\ \Rightarrow T=\sqrt{(\ a)^3}=\ \sqrt{1{,}2527}\approx 1{,}12\ années.$

Retour à l'énoncé

Solution 81 (ref 125)

Soient M_{31}, la masse de la galaxie M31 et m la masse de l'étoile périphérique.

On a : $F_{gravitation}=F_{cenripète}\ \Leftrightarrow \frac{GM_{31}m}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\ \Leftrightarrow \frac{GM_{31}}{r}=v^2\ \Rightarrow M_{31}=\frac{r\,v^2}{G}$

Or $r=5\times10^9\ \mathrm{UA}=5\times10^9\cdot1{,}495\times10^{11}\ m$

$$\Rightarrow \quad M_{31} = \frac{r\,v^2}{G} = \frac{(5\times10^{9}\cdot 1{,}495\times10^{11})\cdot(2\times10^{5})^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 4{,}5\times10^{41}\ kg$$

Retour à l'énoncé

Solution 82 (ref 126)

Considérons un anneau de masse M et de rayon R, de densité linéique uniforme.
Prenons un élément de masse dm sur l'anneau : le champ qu'il crée au centre a pour norme $gg = G\frac{dm}{R^2}$ et est dirigé vers dm.

Pour chaque élément dm à un certain angle, il existe un élément diamétralement opposé dm' créant un champ dg' de même norme mais de direction opposée.
Par symétrie, tous les vecteurs $\vec{g}$ élémentaires se compensent deux à deux, donc le champ gravitationnel au centre est nul !

Retour à l'énoncé

Solution 83 (ref 127)

On donne T_J (1,7699 jours terrestres) et $r = 5{,}578\ R_j$ (rayons de Jupiter).
On cherche ρ_J sachant que $\rho_J = \frac{M_J}{V_J} = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3}$
Tous les paramètres étant rapportés à Jupiter, je n'indique plus l'indice « j » pour alléger l'écriture.
Convertissons la période de Jupiter en secondes :

$$T = 1{,}7699 \cdot 24 \cdot 3600\ s = 152919{,}36\ s$$

Les données de T et r doivent vous faire penser à la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{r^3} = \mathcal{C}$ pour une masse attractrice donnée. Que vaut $\mathcal{C}$?

Partons, comme d'habitude de $F_g = F_c \Leftrightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

Ensuite : $v = \frac{circonférence}{période} = \frac{2\,\pi r}{T}$. Donc, $v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{4\,\pi^2\,r^2}{T^2}$

Et donc : $T^2 = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{GM}$ et donc, la masse M de Jupiter vaut : $M = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{GT^2}$

Or, on l'a vu plus haut : $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ et de plus l'énoncé donne $r = 5{,}578\ R_J$

On a donc au final :

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,r^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,(5{,}578\,R)^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} = \frac{\frac{4\,\pi^2\,(5{,}578\,R)^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\,\pi R^3}$$

$$= \frac{4\,\pi^2\,(5{,}578\,R)^3}{GT^2}\cdot\frac{3}{4\,\pi\,R^3} = \frac{3\,\pi\cdot(5{,}578)^3}{G\,T^2} = \frac{3\,\pi\cdot(5{,}578)^3}{6{,}67\times 10^{-11}\,(152919)^2}$$

$$= 1048\,\frac{kg}{m^3}$$

Ce qui, soit dit au passage est environ 5 fois moins dense que la Terre et à peine plus élevée que la densité de l'eau. Jupiter est une planète gazeuse.

Retour à l'énoncé