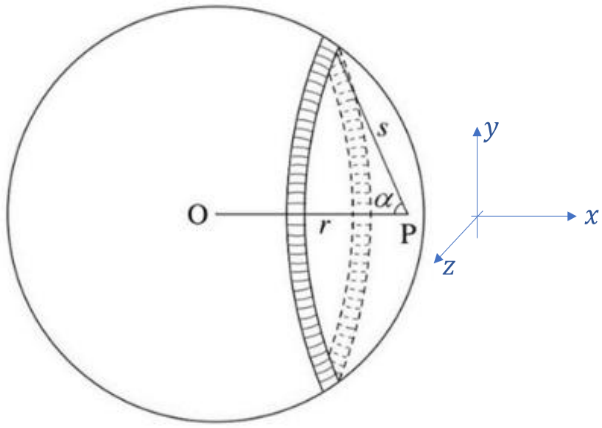
<u>Le champ gravitationnel à l'intérieur d'une coquille sphérique.</u>

On considère une coquille sphérique de centre O et une petite masse μ située sur un point P à l'intérieur de cette coquille sphérique. Le point P est situé à une distance r du centre O.

Finalement, et pour des besoins de calculs intégral que vous allez comprendre tout de suite, on découpe la sphère en anneaux et ensuite, chaque anneau est lui-même coupé en petites tranches de sorte qu'au final, chaque petit morceau a une masse dm.

La distance entre le point P et un petit morceau de masse dm est noté s. L'angle formé par les segments r et s est noté α.

Ce qu'on résume sur la figure suivante :



Le champ gravitationnel ressenti en P et généré par **une petite masse dm** située sur l'anneau est donc donné par :

$$d\vec{g} = G\frac{dm}{s^2}\,\vec{s}$$

Pour des raisons évidentes de symétries, les composantes selon $\hat{y}$ et $\hat{z}$ s'annulent. En effet, une petite masse dm située sur un point de l'anneau va générer un champ gravitationnel dont la composante selon y ou z va être exactement de signe inverse qu'une petite masse dm située diamétralement opposée à ce point de l'anneau. La somme des deux composantes sera nulle. Par contre, les composantes selon $\hat{x}$ vont s'additionner.

Ces composantes en $\hat{x}$ sont :

$$dg_x = -G\frac{dm}{s^2}\cos\,\alpha$$

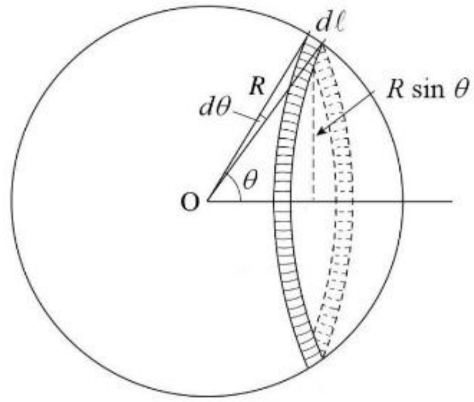
Le signe moins vient du fait que l'accélération est dirigée de P vers la masse dm et donc la composante en $\hat{x}$ est dans la direction opposée à l'axe $\hat{x}$.

Et donc, le champ gravitationnel **généré par <u>l'anneau complet</u>** de masse

$dm' = \sum dm$ vaut :

$$dg_x = -G\frac{dm'}{s^2}\cos\,\alpha$$

Que vaut la masse d'un anneau ?



Calculons tout d'abord sa surface en fonction de θ (voir figure ci-contre.

La largeur angulaire de l'anneau est $d\theta$ et donc sa largeur sur la surface de la sphère vaut :

$$dl = R\, d\theta$$

Le rayon d'un anneau (en fonction de θ) vaut $r = R\sin\theta$.

La surface de l'anneau est donnée par :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= 2\,\pi\, r\, dl \\ &= 2\,\pi\,(R\, sin\theta)(R\, d\theta) \\ &= 2\,\pi R^2 \sin\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Posons σ, la densité de la masse surfacique de la coquille sphérique, càd,

$$\sigma = \frac{masse}{surface}\left(\frac{kg}{m^2}\right).$$

On a alors pour un anneau : $\sigma = \frac{dm'}{d\mathcal{A}}$, de sorte qu'au final, la masse d'un anneau vaut :

$$dm' = \sigma\, d\mathcal{A} = \sigma\, 2\,\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$$

Et donc, la composante selon x d'un champ généré par un anneau :

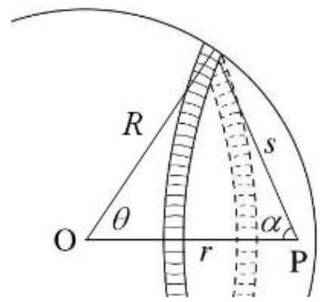
$$\begin{aligned} dg_x &= -G\frac{dm'}{s^2}\cos\alpha \\ &= -G\frac{\sigma\, 2\,\pi R^2 \sin\theta\, d\theta}{s^2}\cos\alpha \end{aligned}$$

Il reste à faire la somme pour tous les anneaux, càd, pour θ allant de 0 à π !

$$\begin{aligned} g_x &= \int_0^\pi -G\frac{\sigma\, 2\,\pi R^2 \sin\theta\, d\theta}{s^2}\cos\alpha \\ &= -G\,\sigma\, 2\,\pi\, R^2 \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\ \sin\theta\, d\theta}{s^2} \end{aligned}$$

Le hic, c'est qu'on voudrait intégrer que sur une seule variable d'intégration, mais ici, α, θ et s varient !

Heureusement, le théorème des cosinus va nous aider (démonstration non vue car supposée être connu à ce niveau).



Ce théorème, adapté à la figure ci-contre donne :

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2\, r\, R\, cos\theta$$

Étant donné que r et R sont constants, la différentiation mène à :

$$\begin{aligned} 2s\, ds &= -2\, r\, R\ \ (-sin\theta)\, d\theta \\ &= 2\, r\, R \sin\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Et donc : $\sin\theta\, d\theta = \frac{s}{rR}\, ds$

Et l'intégrale devient :

$$g_x = \ -G\, \sigma\, 2\, \pi\, R^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos\alpha\ \sin\theta\, d\theta}{s^2} = -G\, \sigma\, 2\, \pi\, R^2 \int_{R-r}^{R+r} \frac{\cos\alpha}{s \cdot r \cdot R}\, ds$$

$$= -G\, \sigma\, 2\, \pi\, R \int_{R-r}^{R+r} \frac{\cos\alpha}{s \cdot r}\, ds$$

Notez le changement de variable. Lorsque θ varie de 0 à $\pi,$ on voit sur la figure (et sans aucun calcul) que s varie de $R - r$ (quand $\theta = 0°$) à $R + r$ (quand $\theta = \pi$).

On s'est donc débarrassé de la variable $\theta,$ mais il reste encore 2 variables : r et $\alpha.$

Réappliquons une nouvelle fois le théorème des cosinus de l'autre côté du triangle :

$$R^2 = r^2 + s^2 - 2\, r\, s \cos\alpha\ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2\, r\, s}$$

L'intégrale devient :

$$g_x = \ -G\, \sigma\, 2\, \pi\, R \int_{R-r}^{R+r} \frac{\cos\alpha}{s \cdot r}\, ds$$

$$= \ -G\, \sigma\, 2\, \pi\, R \int_{R-r}^{R+r} \frac{\frac{(r^2 + s^2 - R^2)}{2\, r\, s}}{s \cdot r}\, ds$$

$$= -G\, \sigma\, 2\, \pi\, R \int_{R-r}^{R+r} \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2\, s^2 \cdot r^2}\, ds$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\int_{R-r}^{R+r}\frac{r^2+s^2-R^2}{s^2}\,ds$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\int_{R-r}^{R+r}1-\frac{R^2-r^2}{s^2}\,ds$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\left\{[s]_{R-r}^{R+r}-(R^2-r^2)\cdot\left[-\frac{1}{s}\right]_{R-r}^{R+r}\right\}$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\left\{(R+r-R+r)-(R^2-r^2)\cdot\left(-\frac{1}{R+r}+\frac{1}{R-r}\right)\right\}$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\left\{2r+\frac{(R+r)(R-r)}{R+r}-\frac{(R+r)(R-r)}{R-r}\right\}$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\{2r+\big(R-r-(R+r)\big)\}$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\{2r+R-r-R-r\}$$

$$= -\frac{G\,\sigma\,\pi\,R}{r^2}\{0\}$$

$$= 0$$

Ceci démontre donc que :

À tout endroit situé à l'intérieur d'une coquille sphérique, le champ gravitationnel est NUL !

Cette propriété, à ne jamais oublier, est **fondamentale** et est extrêmement utile pour résoudre bon nombre d'exercice.