QUESTIONS

ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS

DU TOSS DE MATHS

POUR L'ENTRÉE EN ÉCOLE DE MÉDECINE / DENTISTERIE

Belgique – Septembre 2014

Corrections rédigées par Laurent HARDY ©

Question 1

Les nombres strictement positifs V, d, D, L satisfont la relation

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 L$$

Comment D s'exprime-t-il nécessairement en fonction de d, V et L ?

A) $d - 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$

B) $d - 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$

C) $-d + 8\sqrt{\frac{\pi L}{V}}$

D) $-d + 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}$

Correction détaillée

Question 2

Que vaut le quotient de 10^{-4} par 5.

A) $2\ 10^{-6}$
B) $5\ 10^{-6}$
C) $2\ 10^{-5}$
D) $5\ 10^{-5}$

Correction détaillée

Question 3

Le salaire d'un travailleur est de 1600 euros après des déductions d'impôts s'élevant à 40% du salaire brut. Quel est le salaire brut de ce travailleur (avant déduction) ?

A) $1600 + 40\%\ euros$
B) $1600 + 40 \times 16\ euros$
C) $1600 \times 14/10\ euros$
D) $1600 \times \frac{10}{6} euros$

Correction détaillée

Question 4

Soit x le nombre (non nul) satisfaisant la condition

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{x}$$

Que vaut x ?

A) $13/7$
B) $91/27$
C) 6
D) 91

[Correction détaillée]

Question 5

Une solution de chlorydrate de morphine 1% contient 1 gramme de morphine pour 100 mL. On administre 4 ampoules de 2 mL de chlorydrate de morphine 1% sur 24 heures. Quelle est la quantité (en milligrammes) de morphine administrée sur 24 h ?

A) 0,08

B) 0,8

C) 8

D) 80

[Correction détaillée]

Question 6

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ admet pour solutions $x = 2$ et $x = -3$. Que vaut le nombre $\frac{bc}{a^2}$?

A) -6
B) -3
C) 3
D) 6

[Correction détaillée]

Question 7

Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y a en totalité 27 animaux et 72 pattes d'animaux. En vente directe, un lapin vaut 15 euros et un poulet 10 euros. Quelle est la valeur totale des animaux de la ferme ?

A) $270\ euros$
B) $315\ euros$
C) $360\ euros$
D) $405\ euros$

Correction détaillée

Question 8

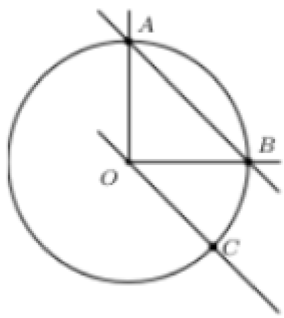
On se place dans l'espace muni d'un repère cartésien. On donne les points A, B et C par leurs coordonnées dans ce repère : $A(1,2,0), B(4,0,5)$ et $C(7,1,2)$.
Déterminez les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$

A) $(-13, 5, -8)$
B) $(1, 3, -10)$
C) $(1, 5, -12)$
D) $(1, 5, -8)$

Correction détaillée

Question 9

La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en O, deux demi-droites OA et OB perpendiculaires et des droites AB et OC parallèles.
Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$?



A) $-2\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Correction détaillée

Question 10

Déterminez l'unique proposition fausse parmi les suivantes.

A) Deux droites parallèles ont des pentes égales.
B) Les droites d'équations respectives $3x = 5y$ et $5x = 3y - 4$ sont perpendiculaires
C) Les pentes de deux droites sont données par m et m'. Si $mm' + 1 = 0$, alors ces droites sont perpendiculaires.
D) Si deux droites sont perpendiculaires, alors il existe un réel r tel que leurs pentes soient solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - rx - 1 = 0$

Correction détaillée

Question 11

Que vaut $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$?

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $-\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2}$

Correction détaillée

Question 12

Parmi les expressions suivantes, supposées définies, laquelle vaut $\tan(x - \pi)$, quel que soit le nombre réel x ?

A) $-\frac{1}{\tan(x)}$
B) $\frac{1}{\tan(x)}$
C) $-\tan(x)$
D) $\tan(x)$

Correction détaillée

Question 13

Soit x un angle (exprimé en radians) compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π tel que $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \frac{1}{2}$.
Que vaut $\sin(x) + \cos(x)$?

A) $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

C) $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$

D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Correction détaillée

Question 14

Soit ABC un triangle équilatéral dont l'aire est égale à $9\sqrt{3}\, m^2$. Quelle est la longueur du côté de ce triangle ?

A) $3\, m$

B) $3\sqrt{3}$ m

C) 6 m

D) $6\sqrt{3}$ m

Correction détaillée

Question 15

Soit ABC un triangle isocèle (les côtés les côtés $[B, A]$ et $[B, C]$ ont même longueur). Le côté $[A, C]$ mesure 12 mètres et l'aire de ABC vaut $12\sqrt{3}\, m^2$. Quelle est l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$?

A) 30°

B) 45°

C) 60°

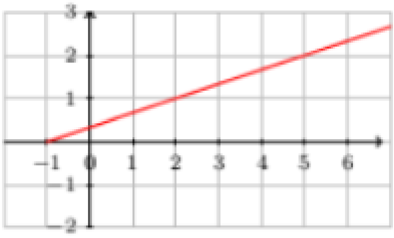
D) aucune des réponses précédentes

Correction détaillée

Question 16

La figure suivante donne une partie de la représentation graphique d'une fonction f du premier degré, définie sur $\mathbb{R}$.

Que vaut $f(-5)$?



A) -3

B) $-\frac{7}{3}$

C) -2

D) $-\frac{4}{3}$

Correction détaillée

Question 17

Déterminez l'unique proposition vraie parmi celles qui suivent.

A) $\frac{\ln(\sqrt{6})}{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln(3)$

B) $\ln(2+a) = ln(2a)$ pour tout $a > -2$

C) $\ln(2) \cdot \ln(a) = \ln(a) + \ln(2)$, pour tout $a > -2$

D) $\ln\left(exp\left(sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \exp(ln(1))$

Correction détaillée

Question 18

Déterminez l'unique proposition correcte parmi les suivantes.

A) la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est paire

B) la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ n'est ni paire, ni impaire.

C) le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ coupe l'axe des abscisses.

D) le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ coupe l'axe des abscisses

Correction détaillée

Question 19

Soit la fonction f défiie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\cos(x^2)$. Quelle est l'expression de la dérivée de f ?

A) $f'(x) = 2x(\cos(x^2) - x^2\sin(x^2))$
B) $f'(x) = 2x(\cos(x^2) + x^2\sin(x^2))$
C) $f'(x) = x(\cos(x^2) - x\sin(x^2))$
D) $f'(x) = x(\cos(x^2) + x\sin(x^2))$

Correction détaillée

Question 20

Que vaut l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx$?

A) $-\frac{3}{2}$
B) 0
C) $\frac{1}{2}$
D) 1

Correction détaillée

CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Correction Question 1

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D+d}{4}\right)^2 L \Leftrightarrow \left(\frac{D+d}{4}\right)^2 = \frac{4V}{\pi L} \Leftrightarrow \frac{D+d}{4} = 2\sqrt{\frac{V}{\pi L}} \Leftrightarrow \boldsymbol{D = -d + 8\sqrt{\frac{V}{\pi L}}}$$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 2

$\frac{10^{-4}}{5} = 0{,}2\ 10^{-4} = 2\ 10^{-1}10^{-4} = 2\ 10^{-5}$

La bonne réponse est la réponse C

Retour énoncé

Correction Question 3

Soit x, le salaire brut. On nous dit que :

$$x - 0{,}40x = 1600 \Leftrightarrow (1-0{,}40)x = 1600 \Leftrightarrow 0{,}6\,x = 1600 \Rightarrow x = 1600 \times \frac{10}{6}\ euros$$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 4

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{13} - \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{14}{91} - \frac{13}{91} = \frac{1}{91} \Rightarrow \boldsymbol{x = 91}$$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 5

On a 1 gr de morphine pour 100 mL de chlorydrate de morphine.
Donc, une ampoule de 2 mL (50 fois moins) contient $\frac{1}{50}\,gr$ et 4 ampoules de 2 mL en contiennent $4\times\frac{1}{50}\,gr=\frac{4}{50}\,gr=\frac{8}{100}gr=0{,}080\,gr=80\,mg.$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 6

Une équation du second degré ax^2+bx+c peut toujours se mettre sous la forme $a\,(x-r_1)(x-r_2)$ où $r_1$et r_2 sont les racines du trinôme. Ici, l'équation du second degré peut se mettre sous la forme : $a\,(x-2)(x+3)=ax^2+ax-6a$
Par identification de ax^2+bx+c avec $ax^2+ax-6a$, on a :
$b=a$ et $c=-6a$. Donc $bc=a\cdot(-6a)=-6a^2$ et $\frac{bc}{a^2}=-\frac{6a^2}{a^2}=-6$

La bonne réponse est la réponse A

Retour énoncé

Correction Question 7

Soit L, le nombre de lapins (qui ont 4 pattes …) et soit x, le nombre de poulets (à 2 pattes).
Il y a 27 animaux, donc : $L+P=27\quad(1)$
72 pattes se comptent à partir de L lapins à 4 pattes + P poulets à 2 pattes, soit :
$4L+2P=72\ \Leftrightarrow 2L+P=36$ (2).
Soustrayons membre à membre (2) de (1) : $2L+P-L-P=9\ \Leftrightarrow L=9$ qu'on injecte dans (1) : $9+P=27\ \Rightarrow P=18.$
Il y a donc 9 lapins et 18 poulets.
La valeur de l'élevage vaut donc : $9\times15+18\times10=135+180=315\,euros$

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

Correction Question 8

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ défini par les points $A(1,2,0)$ et $B(4,0,5)$ est :

$$\overrightarrow{BA} = (1,2,0) - (4,0,5) = (-3,2,-5)$$

Donc, $2\,\overrightarrow{BA} = (-6,4,-10)$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ défini par $C(7,1,2)$ et $D(x,y,z)$ est :

$$\overrightarrow{CD} = (x,y,z) - (7,1,2) = (x-7, y-1, z-2)$$

Donc, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow x - 7 = -6\,; y - 1 = 4\,; z - 2 = -10 \;\Rightarrow x = 1\,; y = 5\,; z = -8$

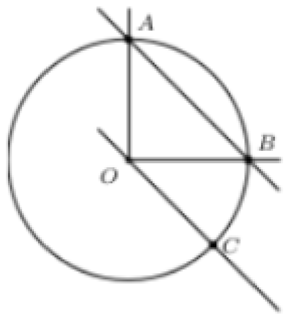
Le point D vaut $D(1,5,-8)$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 9

La figure suivante représente un cercle de rayon 2 centré en O, deux demi-droites OA et OB perpendiculaires et des droites AB et OC parallèles.



Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$?

Le produit scalaire est défini par :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OA}\|\,\|\overrightarrow{OC}\| \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$$

Le rayon du cercle étant 2, on déduit sans calcul que :

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = 2$$

La longueur OA et OC étant identiques, le triangle OAB est isocèle et donc les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OBA}$ sont identiques et valent chacun 45°. Par la propriété des angles alternes/internes, on déduit immédiatement que l'angle $\widehat{BOC} = 45°$ et donc que l'angle $\widehat{AOC} = 135°$, soit $\frac{3\pi}{4}$.

Or $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

Donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \times 2 \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

La bonne réponse est la réponse A

Retour énoncé

Correction Question 10

Proposition A : Deux droites parallèles ont des pentes égales ?

VRAI, c'est même la définition classique de deux droites parallèles.

Proposition B : Les droites d'équations respectives $3x = 5y$ et $5x = 3y - 4$ sont perpendiculaires ?

L'équation de la première droite se récrit : $y = \frac{3}{5}x$. Sa pente vaut donc $\frac{3}{5}$.

L'équation de la deuxième droite se récrit : $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$. Sa pente vaut donc $\frac{5}{3}$.

Le produit des pentes vaut $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$. **FAUX**, elles ne sont pas perpendiculaires (il aurait fallu pour cela que le produit des pentes fasse 1 !).

Proposition C : Les pentes de deux droites sont données par m et m'. Si $mm' + 1 = 0$, alors ces droites sont perpendiculaires ?

VRAI, c'est même la définition classique de deux droites parallèles.

Proposition D : Si deux droites sont perpendiculaires, alors il existe un réel r tel que leurs pentes soient solutions de l'équation du second degré suivante : $x^2 - rx - 1 = 0$?

Soient m et m' les pentes de ces deux droites. Si elles sont solutions de $x^2 - rx - 1 = 0$, alors leur produit $\boldsymbol{mm'} = -\frac{1}{1} = -1$ car le produit des deux racines r_1 et r_2 d'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est tel que $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$ (propriété à connaître pour le concours !). Dans $x^2 - rx - 1$, $a = 1$ et $c = -1 \;\; \Rightarrow \frac{c}{a} = -1$. Elles sont donc bien perpendiculaires , puisque dans tous les cas, $mm' = 1$, ce qui est la définition de deux droites perpendiculaires. **VRAI**.

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

Correction Question 11

$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin(240°)$. On est donc dans le 3eme quadrant du cercle trigonométrique, ce qui va impliquer un sinus forcément négatif, et donc éliminer automatiquement les réponses B et D.

Calculer $\sin(240°)$ revient à calculer $sin\,(60°)$ et opposer le signe. Or $sin\,(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $sin\,(240°) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

La bonne réponse est la réponse A

Retour énoncé

Correction Question 12

$$\tan(x-\pi) = \frac{\sin(x-\pi)}{\cos(x-\pi)}$$

Or $\sin(x-\pi) = -\sin(x)$ et $\cos(x-\pi) = -\cos(x)$

D'où

$$\tan(x-\pi) = \frac{\sin(x-\pi)}{\cos(x-\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 13

Soit x un angle (exprimé en radians) compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π tel que $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \frac{1}{2}$.
Que vaut $\sin(x) + \cos(x)$?

$$\sin^4(x) - \cos^4(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin^2(x) - \cos^2(x))(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \frac{1}{2}$$

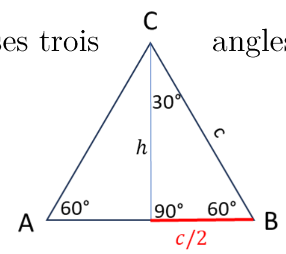
$$\Leftrightarrow \sin^2(x) - \cos^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 60° \Leftrightarrow x = 30°$$

D'où $\sin(30°) + \cos(30°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 14



Un triangle équilatéral a ses 3 côtés de longueurs égales ainsi que ses trois angles de mesure égale (=60°).

La surface est donnée par $\mathcal{A} = \frac{Base \times Hauteur}{2}$

Ici, $\frac{c \times h}{2} = 9\sqrt{3}$

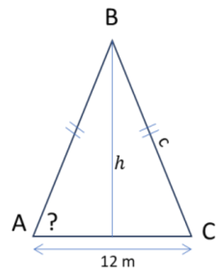
Or, on voit aussi que $c\cos(30°) = h \Leftrightarrow c\frac{\sqrt{3}}{2} = h$

$\frac{c \times h}{2} = 9\sqrt{3}$ devient $\frac{c \times c\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{c^2}{4} = 9 \Rightarrow \boldsymbol{c = 6\,m}$

La bonne réponse est la réponse C

Retour énoncé

Correction Question 15



La surface étant donnée par $\mathcal{A} = \frac{Base \times Hauteur}{2}$, on a ici :

$$\mathcal{A} = \frac{12 \times h}{2} = 12\sqrt{3} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

Utilisant Pythagore sur un des 2 triangles rectangle, on a :

$$h^2 + 6^2 = c^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - 36$$

Or, on avait trouvé que $h = 2\sqrt{3}$, donc $h^2 = 12$, et $12 = c^2 - 36 \Rightarrow c^2 = 48 \Rightarrow c = 4\sqrt{3}$.

Dans le triangle rectangle de gauche, on a :

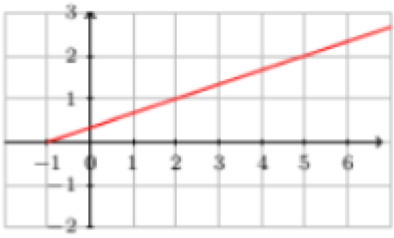
$$c\cos(\widehat{BAC}) = 6 \Rightarrow \mathbf{\cos(\widehat{BAC})} = \frac{6}{c} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et donc $\widehat{BAC} = 30°$

La bonne réponse est la réponse A

Retour énoncé

Correction Question 16



Soit $y = ax + b$, l'équation générale de la droite.

On observe 2 points de passage évidents :

$A(-1,0)$ et $B(2,1)$. On a donc à résoudre :

$$\begin{cases} -a + b = 0 & (1) \\ 2a + b = 1 & (2) \end{cases}$$

Effectuons (2)-(1) :

$2a + b + a - b = 1 \Leftrightarrow a = 1/3$ et donc en injectant a dans (1) : $b = 1/3$.

L'équation de la droite est donc : $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Dès lors $f(-5) = \frac{1}{3} \cdot -5 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 17

Proposition A : $\frac{\ln(\sqrt{6})}{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln(3)$? NON, car $\frac{\ln(\sqrt{6})}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(6^{\frac{1}{2}}\right)}{\ln(2)} = \frac{1}{2}\frac{\ln(6)}{\ln(2)} \neq \frac{1}{2}\ln(3)$ **FAUX**

Proposition B : $\ln(2+a) = ln(2a)$? NON, car $\ln(2a) = \ln(2) + \ln(a) \neq \ln(2+a)$ **FAUX**

Proposition C : $\ln(2) \cdot \ln(a) = \ln(a) + \ln(2)$?
NON, car $\ln(a) + \ln(2) = \ln(2a) \neq \ln(2) \cdot \ln(a)$ **FAUX**

Proposition D : $\ln\left(exp\left(sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \exp(ln(1))$? OUI, car $sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et cela revient à vérifier si **:** $\ln(exp(1)) = \exp(ln(1))$. Ce qui est VRAI car $\exp(x)$ et $\ln(x)$ sont des fonctions inverses : $\ln(e^1) = \ln(e) = 1$ et $\exp(ln(1)) = \exp(0) = e^0 = 1$. **VRAI**

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

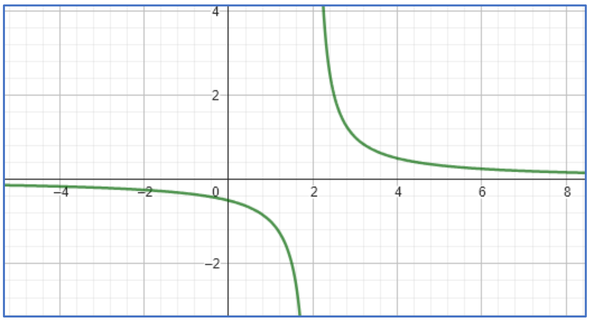
Correction Question 18

Proposition A : la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est paire ?
Surement pas, une fonction est paire ssi $f(x) = f(-x)$, càd si elle est symétrique par rapport à l'axe OY. Or $\sqrt{x}$ n'est définie QUE pour $x > 0$. **FAUX**.

Proposition B : la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ n'est ni paire, ni impaire ?
Cette fonction **est** bien **paire**. En effet, si on remplace x par $-x$, la fonction ne change pas. **FAUX**.

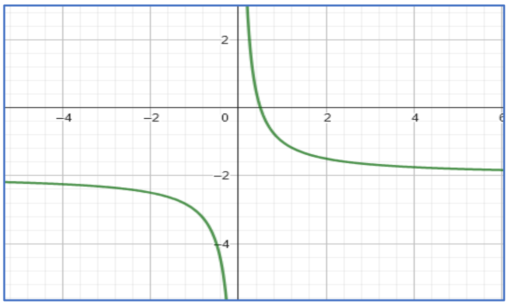
Proposition C : le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-2}$ coupe l'axe des abscisses ?

Autrement dit, est-il possible que $f(x) = 0$? Non, on voit que $x = 2$ est une asymptote verticale et que lorsque x tend vers $\pm\infty$, $f(x)$ tend vers 0. Mais à aucun moment $f(x)$ ne coupe l'axe des abscisses. **FAUX**.



Proposition D : le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ coupe l'axe des abscisses ?

S'il est vrai que $f(x) = \frac{1}{x}$ ne coupe pas l'axe des abscisses pour les mêmes raisons qu'en C ci-dessus, $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ qui est une translation verticale de $\frac{1}{x}$ de 2 unités vers le bas, coupe de ce fait l'axe des abscisses. **VRAI !**



La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 19

$$f(x) = x^2 \cos(x^2)$$

On utilise $(fg)' = f'g + fg'$

Ici, $(f(x) = x^2\cos(x^2))' = (x^2)' \cdot \cos(x^2) + x^2 \cdot (\cos(x^2))'$

$= 2x\cos(x^2) + x^2 \cdot 2x(-\sin(x^2))$

$= 2x\cos(x^2) - 2x^3\sin(x^2)$

$= 2x(\cos(x^2) - x^2\sin(x^2))$

La bonne réponse est la réponse A

Retour énoncé

Correction Question 20

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2x)\ dx = \frac{1}{2}[\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

FIN