
QUESTIONS
ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS
DU CONCOURS DE MATHS
POUR L'ENTRÉE EN ÉCOLE DE
MÉDECINE / DENTISTERIE

Belgique – **SEPTEMBRE 2019**

Corrections rédigées par Laurent HARDY ©

Diffusion libre / merci de citer la source en échange de la gratuité et du travail effectué !

Utilisation commerciale interdite

Question 1

Quand l'électricité produite par une installation de panneaux photovoltaïques n'est pas utilisée, elle est injectée sur le réseau et devient disponible pour d'autres consommateurs au même titre que l'électricité produite par les centrales. Cette électricité est rachetée au propriétaire des panneaux, on dit que le compteur électrique lié à l'installation photovoltaïque « tourne à l'envers ». Pour établir la facture, le montant des rachats est déduit du montant de l'électricité importée du réseau quand les panneaux du propriétaire ne produisent pas ou pas assez d'électricité.

Si la quantité d'électricité injectée est supérieure à la quantité importée, la facture du propriétaire est annulée.

Des chercheurs en économie ont imaginé un nouveau mode de facturation de l'électricité afin d'inciter les consommateurs, propriétaires de panneaux photovoltaïques ou non, à synchroniser le plus possible leur consommation électrique avec la production des panneaux (pendant la journée).

Leur idée est de différencier le prix de l'électricité selon le moment de production ou d'utilisation. Ainsi par exemple, l'électricité réinjectée sur le réseau un dimanche après-midi ensoleillé d'été quand il y a peu de besoins en électricité de la part de particuliers ou d'entreprises (heures creuses) serait tarifée à un tarif inférieur à celui de l'électricité disponible sur le réseau quand l'activité économique et la consommation des ménages est la plus élevée (heures de pointe). Ils considèrent également, comme c'est le cas actuellement, que la facture peut, au mieux, être annulée.

Supposons que, en 2019, l'installation électrique de la famille D. a injecté Q_1 kWh d'électricité sur le réseau en heures creuses mais importé Q_2 kWh en heures de pointe en provenance du réseau.

Parmi les propositions suivantes (où k, k_1, k_2 sont des constantes strictement positives, avec $k_2 > k_1$), déterminez celle qui est une expression du coût P obtenu en appliquant le modèle décrit ci-dessus de la consommation d'électricité de la famille D. en 2019.

- A) $P = k(Q_2 - Q_1)$
- B) $P = k(Q_2 - Q_1)$ si $Q_2 > Q_1$ et $P = 0$ si $Q_2 \leq Q_1$
- C) $P = k_2 Q_2 - k_1 Q_1$ si $k_2 Q_2 > k_1 Q_1$ et $P = 0$ si $k_2 Q_2 \leq k_1 Q_1$
- D) $P = k_2 Q_2 - k_1 Q_1$ si $Q_2 > Q_1$ et $P = 0$ si $Q_2 \leq Q_1$

Cette question a été annulée. Je l'ai corrigé malgré tout ...

[Correction détaillée](#)

Question 2

Dans le pays P, il y a deux types de médecins : ceux qui sont conventionnés et ceux qui ne le sont pas. Si je vais chez un médecin conventionné, il me facturera des honoraires dont une partie sera payée par la mutuelle. Je dois alors payer 8 euros, le reste étant pris en charge par la mutuelle. Si je vais chez un médecin non conventionné, ses honoraires seront le double de ceux d'un médecin conventionné, et la mutualité ne payera que la moitié de la somme qu'elle aurait payée pour un médecin conventionné. Je paye alors 40 euros, le reste étant pris en charge par la mutuelle.

Quels sont les honoraires d'un médecin non conventionné ?

- A) 24 euros
- B) 48 euros
- C) 54 euros
- D) 56 euros

[Correction détaillée](#)

Question 3

Soit (x, y) une solution du système suivant de deux équations à deux inconnues réelles

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

- A) $xy = 2$
- B) $x - y = -3$
- C) $x^2 + y^2 = 5$
- D) Ce système n'admet pas de solution.

[Correction détaillée](#)

Question 4

Soit a une constante réelle. Considérons l'équation

$$(a^2 + 1)x^2 + a^2x - 1 = 0$$

Parmi les propositions suivantes, une seule est vraie, quelle que soit la valeur de a . Laquelle ?

L'équation...

- A) N'admet aucune solution réelle
- B) Admet au plus une solution réelle
- C) Admet une seule solution réelle
- D) Admet deux solutions réelles distinctes

[Correction détaillée](#)

Question 5

Considérons la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

Définissons la fonction g par $g(x) = \frac{f(3x)}{3}$.

Que vaut $g(g(3))$?

- A) $\frac{29}{11}$
- B) $\frac{7}{15}$
- C) $\frac{11}{15}$
- D) $\frac{29}{33}$

[Correction détaillée](#)

Question 6

Considérons la limite

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x+1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \frac{4}{x^7} + \frac{5}{x^9}}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A) $L = -\infty$
- B) $L = -4$
- C) $L = 0$
- D) $L = 4$

[Correction détaillée](#)

Question 7

Considérons la fonction réelle f dont l'expression analytique est donnée par

$$f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1)$$

Quel est le domaine de définition de f ?

- A) $] -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} [\cup] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty [$
- B) $] -\infty, -\frac{1}{2} [\cup] 1, +\infty [$
- C) $] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} [$
- D) $] -\frac{1}{2}, 1 [$

[Correction détaillée](#)

Question 8

Considérons la fonction réelle f dont l'expression analytique est donnée par

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$$

en tout point où le dénominateur est non nul. Que vaut $f'(\pi)$?

- A) 0
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{8}$
- D) $\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{8}$

[Correction détaillée](#)

Question 9

Notons e la base des logarithmes naturels. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale à l'intégrale

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

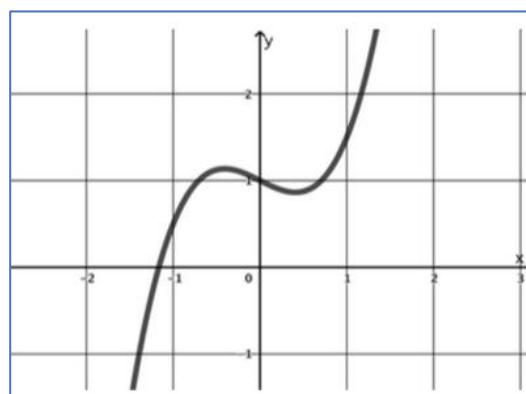
- A) $-\frac{1}{2}$

- B) 0
 C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{1}{e}$

Correction détaillée

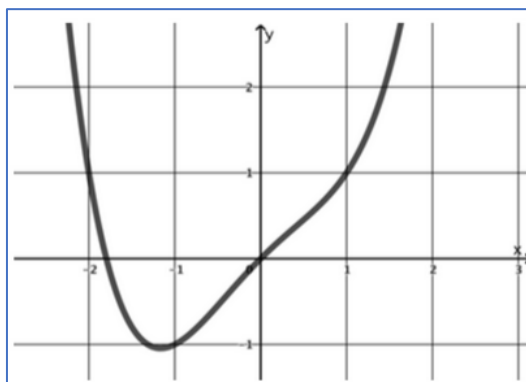
Question 10

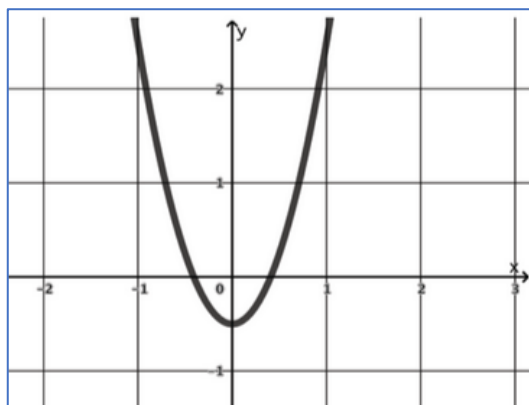
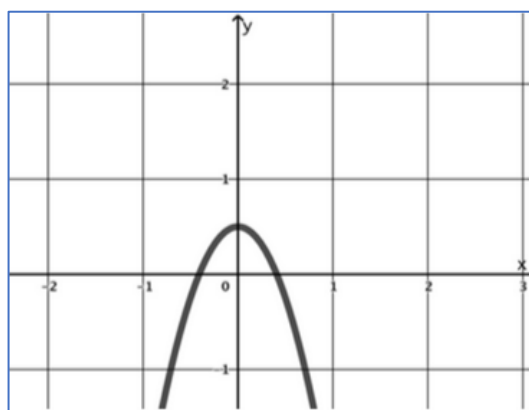
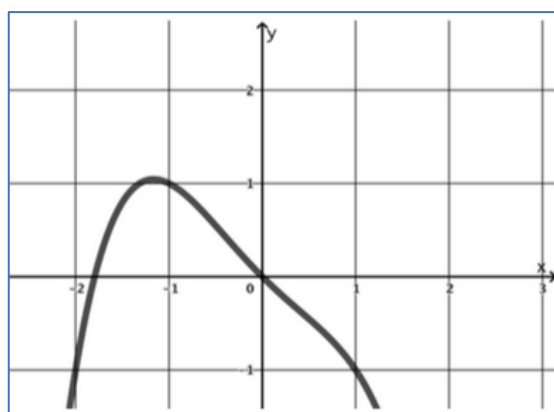
La courbe ci-contre est une partie de la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Parmi les courbes suivantes, laquelle peut représenter la dérivée de la fonction f ?

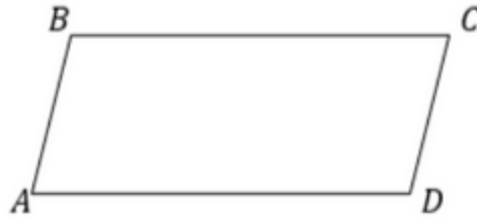
- A) Courbe C_1



B) Courbe C_2 C) Courbe C_3 D) Courbe C_4 [Correction détaillée](#)**Question 11**

Considérons un parallélogramme ABCD tel que représenté ci-dessous. Supposons que l'aire du parallélogramme vaut 25 cm^2 , le côté AB mesure 5 cm et l'angle $\widehat{BAD}$ a une amplitude de 60° .

NB. L'illustration n'est pas nécessairement à l'échelle ni même dans des proportions correspondant à l'énoncé.



Quelle est la longueur du côté AD ?

- A) $10\sqrt{2}$ cm
- B) $5\sqrt{2}$ cm
- C) 10 cm
- D) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ cm

Correction détaillée

Question 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A de coordonnées (2; 2), B de coordonnées (8; 4) et C de coordonnées (5; 8). Considérons également le point H correspondant au pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Quelles sont les coordonnées du point H ?

- A) (6; 4)
- B) $\left(\frac{13}{2}; \frac{7}{2}\right)$
- C) $\left(\frac{7}{2}; \frac{13}{2}\right)$
- D) (5; 3)

Correction détaillée

Question 13

Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale à

$$\cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

- A) $2\cos(x) - \sin(x)$

- B) $-2 \cos(x) - \sin(x)$
- C) $\sin(x)$
- D) $-\sin(x)$

Correction détaillée

Question 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les trois droites suivantes :

$$d_1 \equiv y = 3x + 1$$

$$d_2 \equiv y = \frac{x}{2} + 1$$

$$d_3 \equiv y = 6 - 2x$$

Soient A le point d'intersection de d_1 et d_2 , B le point d'intersection de d_2 et d_3 et C le point d'intersection de d_1 et d_3 .

Que vaut le périmètre du triangle ABC ?

- A) $\sqrt{10}$
- B) $\sqrt{5} + \sqrt{10}$
- C) $\sqrt{10} + \sqrt{20}$
- D) $\sqrt{20} + \sqrt{40}$

Correction détaillée

Question 15

Considérons la série statistique composée des cinq termes distincts suivants :

$a, 3, 4, 5, a + 4$ avec a un entier strictement positif. Notons $\bar{x}$ la moyenne de la série et supposons que $\bar{x} = 4$.

Que vaut l'écart-type de la série ?

- A) 0
- B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- C) $\sqrt{2}$
- D) $\sqrt{10}$

Correction détaillée

CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Correction Question 1

Peut-être que la question a été annulée car le rôle des constantes k, k_1, k_2 n'a pas été clairement défini ?

Il faut en effet «deviner» (ou plutôt 'déduire') à partir des réponses que :

- k_1 représente le prix de l'électricité par kWh en heures creuses (quand on INJECTE de l'électricité) et
- k_2 représente le prix de l'électricité par kWh en heures pleines (quand on IMPORTE de l'électricité)

Et k serait censé représenter le prix de l'électricité par kWh que ce soit en heures pleines ou en heures creuses, ce qui n'a pas de sens puisque le prix est différent selon l'heure ! (C'est peut-être aussi la cause de l'annulation de la question (?)). Cela élimine d'office les réponses **A** et **B** ...

Soit ensuite :

- Q_1 : la quantité d'électricité injectée sur le réseau en heures creuses (kWh) en 2019
- Q_2 : la quantité d'électricité importée du réseau en heures pleines (kWh) en 2019

Alors :

- $k_1 Q_1$ représente le **prix** TOTAL de l'électricité injecté en heures creuses en 2019.
- $k_2 Q_2$ représente le **prix** TOTAL de l'électricité importé en heures pleines en 2019.

Le coût de la facture d'électricité finale est donc : $P = k_2 Q_2 - k_1 Q_1$ si $k_2 Q_2 > k_1 Q_1$

Et vaut 0 si $k_2 Q_2 \leq k_1 Q_1$

La bonne réponse est la réponse C

[Retour énoncé](#)

Correction Question 2

Soit H_c , l'honoraire du médecin conventionné et H_n , l'honoraire du médecin conventionné. Et soit M , la contribution de la mutuelle.

Lorsqu'on va chez le médecin conventionné, l'énoncé indique « Je paye 8 euros, le reste est pris en charge par la mutuelle », ce qu'on exprime par :

$$H_c = 8 + M \quad (1)$$

Lorsqu'on va chez un médecin non-conventionné, l'énoncé indique tout d'abord «ses honoraires seront le double de ceux d'un médecin conventionné », ce qu'on exprime par :

$$H_n = 2 H_c \quad (2)$$

L'énoncé indique ensuite : « la mutualité ne payera que la moitié de la somme qu'elle aurait payée pour un médecin conventionné », càd $\frac{M}{2}$.

Et finalement, je paye 40 € chez le médecin non-conventionné. Donc, les honoraires du médecin non conventionné sont :

$$H_n = 40 + \frac{M}{2} \quad (3)$$

On injecte (1) dans (2) : $H_n = 2(8 + M) = 16 + 2M$

Qu'on injecte à présent dans (3) :

$$16 + 2M = 40 + \frac{M}{2} \Leftrightarrow 32 + 4M = 80 + M \Leftrightarrow 3M = 48 \Rightarrow M = 16$$

On injecte finalement $M = 16$ dans $H_n = 40 + \frac{M}{2} \Rightarrow H_n = 40 + \frac{16}{2} = 40 + 8 = 48$

La bonne réponse est la réponse B

[Retour énoncé](#)

Correction Question 3

Réolvons

$$\begin{cases} 4x + y = 2 & (1) \\ 2x - 3y = 8 & (2) \end{cases}$$

Multiplions (2) par -2 , le système devient :

$$\begin{cases} 4x + y = 2 & (1') \\ -4x + 6y = -16 & (2') \end{cases}$$

Additionnons membre à membre (1') + (2') :

$$7y = -14$$

D'où $y = -2$, que l'on réinjecte dans (1') :

$$4x + (-2) = 2 \Leftrightarrow 4x - 2 = 2 \Leftrightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

La solution du système est donc : $x = 1$ et $y = -2$

Ce qui élimine la réponse D automatiquement.

- $xy = -2$, ce qui élimine la réponse A
- $x - y = 5$, ce qui élimine la réponse B

Et en effet, $x^2 + y^2 = 5$

La bonne réponse est la réponse C

[Retour énoncé](#)

Correction Question 4

Soit $(a^2 + 1)x^2 + a^2x - 1 = 0$

C'est une équation du second degré en x , dont le discriminant vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^4 - 4(a^2 + 1) \cdot (-1) = a^4 + 4a^2 + 4 = (a^2 + 2)^2$$

$(a^2 + 2)^2$ est bien sur toujours positif quel que soit a .

Donc, le discriminant Δ est toujours positif pour tout a .

Et donc : $(a^2 + 1)x^2 + a^2x - 1 = 0$ admet toujours deux racines distinctes quel que soit a .

La bonne réponse est la réponse D

[Retour énoncé](#)

Correction Question 5

On donne $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

On définit : $g(x) = \frac{f(3x)}{3}$. On doit calculer $g(g(3))$?

On procède simplement par étape :

On effectue d'abord $g(3)$: $g(3) = \frac{f(3 \cdot 3)}{3} = \frac{f(9)}{3} = \frac{1 + \frac{2}{9}}{3} = \frac{\frac{11}{9}}{3} = \frac{11}{27}$

On effectue ensuite $g\left(\frac{11}{27}\right)$: $g\left(\frac{11}{27}\right) = \frac{f\left(3 \cdot \frac{11}{27}\right)}{3} = \frac{f\left(\frac{11}{9}\right)}{3} = \frac{1 + \frac{2}{\frac{11}{9}}}{3} = \frac{\left(1 + \frac{18}{11}\right)}{3} = \frac{\frac{11+18}{11}}{3} = \frac{\frac{29}{11}}{3} = \frac{29}{33}$

La bonne réponse est la réponse D

[Retour énoncé](#)

Correction Question 6

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x+1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \frac{4}{x^7} + \frac{5}{x^9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \frac{4}{x^7} + \frac{5}{x^9}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} \left(4 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^6} + \frac{5}{x^8}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^6} + \frac{5}{x^8}}
 \end{aligned}$$

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, le numérateur tend vers 4, alors que le dénominateur tend vers 1.
Dès lors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x+1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^5} + \frac{4}{x^7} + \frac{5}{x^9}} = 4$$

La bonne réponse est la réponse D

[Retour énoncé](#)

Correction Question 7

Pour que $f(x) = \ln(-2x^2 + x + 1)$ ait du sens, il faut que $-2x^2 + x + 1$ soit strictement positif (car $\ln(z)$ a pour domaine de définition $z \in]0; +\infty[$).

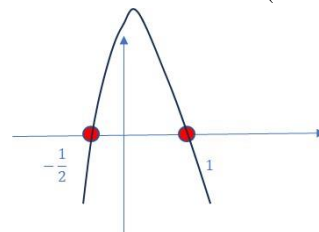
Il faut donc faire une simple étude de signe de $-2x^2 + x + 1$ et définir pour quelles valeurs de x cette expression est positive.

Calculons d'abord les racines :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)(1)}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4}$$

Les 2 racines sont : $x_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1$

Le coefficient en x^2 est négatif, on est donc sûr que la parabole est concave (orientée vers le bas, du style :



Dès lors, on voit immédiatement que la parabole $-2x^2 + x + 1$ est strictement positive sur $]-\frac{1}{2}; 1[$

La bonne réponse est la réponse D

[Retour énoncé](#)

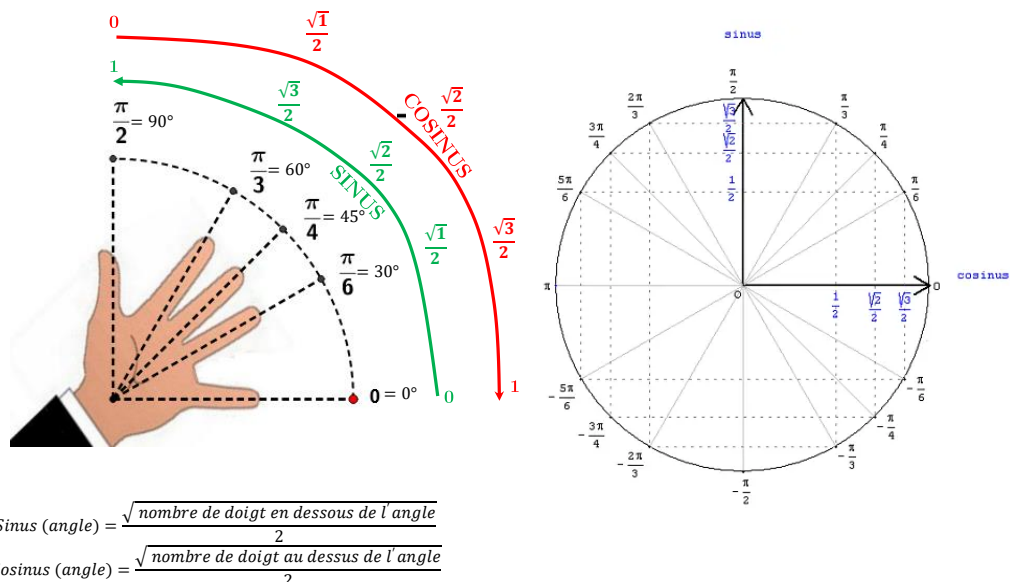
Correction Question 8

Il est impératif de connaître par cœur les formules de dérivation, dans notre cas :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Ainsi que valeurs de sinus et cosinus d'angles particuliers :

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x (en degrés)	0	30	45	60	90	180
Cos (x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sin (x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Dérivons $f(x) = \frac{\sin(\frac{x}{3})}{\cos(\frac{x}{4})}$:

$$\left(\frac{\sin(\frac{x}{3})}{\cos(\frac{x}{4})} \right)' = \frac{\frac{1}{3} \cos(\frac{x}{3}) \cdot \cos(\frac{x}{4}) - \sin(\frac{x}{3}) \cdot (-\frac{1}{4}) \cdot \sin(\frac{x}{4})}{\cos^2(\frac{x}{4})}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cos(\frac{x}{3}) \cdot \cos(\frac{x}{4}) + \frac{1}{4} \sin(\frac{x}{3}) \cdot \sin(\frac{x}{4})}{\cos^2(\frac{x}{4})}$$

En $x = \pi$, cette expression vaut :

$$f'(\pi) = \frac{\frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4} \sin(\frac{\pi}{3}) \cdot \sin(\frac{\pi}{4})}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{8}$$

La bonne réponse est la réponse C

[Retour énoncé](#)

Correction Question 9

Parmi les types d'intégrales à connaître par cœur figure

$$\int u'(x) u^n(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$$

Et bien sûr, quelques dérivées sont aussi à apprendre par cœur pour gagner beaucoup de temps, entre autres, celle qui nous intéresse pour cette question : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

De ce fait, $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$ vous est servie sur un plateau puisque $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$

Est bien de la forme $\int u'(x) u^n(x) dx$, avec

$u(x) = \ln(x)$; $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $n = 1$.

D'où :

$$\int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx = \left[\frac{\ln^2(x)}{2} \right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

La bonne réponse est la réponse C

Si vous ne vous étiez pas souvenu que $\int u'(x) u^n(x) dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$, il vous était aussi possible de faire le calcul en faisant une intégration par parties :

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow \int (fg)' = \int f'g + \int fg' \Rightarrow \int f'g = fg - \int fg'$$

En prenant :

$$g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 1/x$$

Et

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \ln(x)$$

De sorte que :

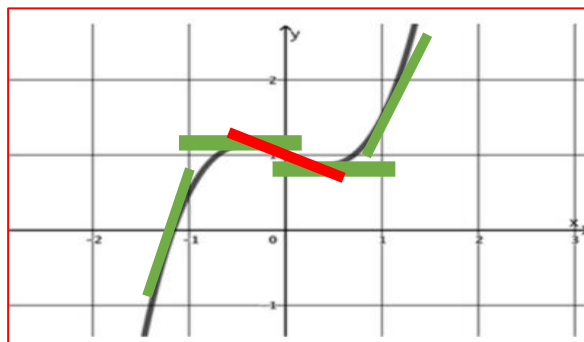
$$\int \frac{1}{x} \ln(x) = \ln^2(x) - \int \frac{1}{x} \ln(x) \Leftrightarrow 2 \int \frac{1}{x} \ln(x) = \ln^2(x) \Leftrightarrow \int \frac{1}{x} \ln(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

Qui, bien sûr, aboutit finalement au même résultat !

[Retour énoncé](#)

Correction Question 10

Observons la courbe de l'énoncé et repérons quelques pentes « clé » :



La pente est nulle en $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ (environ), donc la bonne réponse doit comporter 2 racines en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, ce qui exclut la courbe A et la courbe D !

Ensuite, la pente est négative (en rouge) entre ces 2 points, donc la bonne réponse doit comporter des valeurs négatives entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, ce qui exclut la courbe C.

Et en effet la courbe B répond aux autres caractéristiques : des valeurs positives avant $x = -\frac{1}{2}$ et des valeurs également positives après $x = +\frac{1}{2}$.

La bonne réponse est la réponse B

[Retour énoncé](#)

Correction Question 11

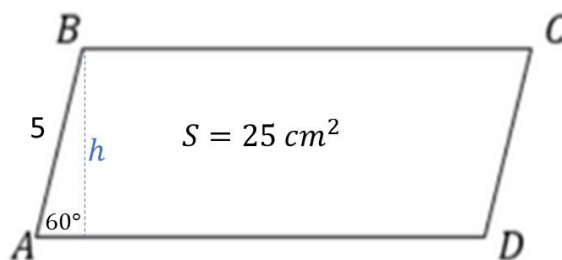
On commence par noter toutes les données sur la figure. On note h , la hauteur du parallélogramme.

La surface d'un parallélogramme est donnée par $S = \text{base} \times \text{hauteur}$.

Ici : $S = AD \times h = 25$.

Or, $h = 5 \sin(60^\circ) = 5 \frac{\sqrt{3}}{2}$

D'où : $AD = \frac{25}{h} = \frac{25}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

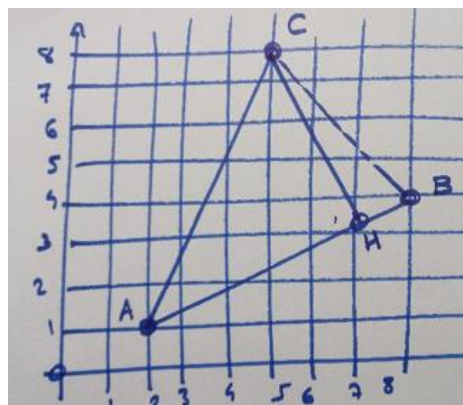


La bonne réponse est la réponse D

[Retour énoncé](#)

Correction Question 12

Le conseil que je vous donne, lors du concours est de tracer 'à la main' (mais pas trop grossièrement quand même) les données afin de visualiser le problème et déjà obtenir une réponse, même approximative. Voici le croquis que j'ai personnellement fait et ... qui me donne pour h , des coordonnées approximatives de h (7 ; 3) et m'élimine 3 réponses !(A, C et D). **La réponse B étant très proche du point h dessiné !**



Personnellement, le jour du concours, j'en serais resté là sans faire aucun calcul ! Vous voyez bien qu'il n'y a aucune chance pour que la droite AB (et donc h) passe par (6 ; 4) ni par (5 ; 3) et encore moins par (3,5 ; 7,5) ...

Démontrons le pour la forme ...

Il y a une méthode «rapide» qui consiste à exploiter le fait que la perpendicularité de deux droites (ici AB et CH) implique un produit scalaire nul et ensuite la colinéarité de deux autres (ici AH et AB) implique une égalité de produit scalaire. Mais ... je pense que beaucoup ne sont pas à l'aise avec ces méthodes et ont plus appris à trouver des équations d'une certaine pente et passant par un certain point. C'est donc ce que nous allons faire !

La droite AB, d'équation $y = ax + b$ passe par (2 ; 2) et par (8 ; 4).

Elle obéit donc au système :

$$\begin{cases} 2 = 2a + b & (1) \\ 4 = 8a + b & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)*-4} \begin{cases} -8 = -8a - 4b \\ 4 = 8a + b \end{cases}$$

On additionne les 2 équations : $-3b = -4 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$

On injecte $b = \frac{4}{3}$ dans (1) $\Rightarrow 2 = 2a + \frac{4}{3} \Rightarrow 2a = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

La droite AB passant par (2 ; 2) et par (8 ; 4) est donc : $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

Sa pente (le coefficient de a) est donc $\frac{1}{3}$ et dès lors, la pente de la droite perpendiculaire est -3 (rappel : $m' = -\frac{1}{m}$ où m est la pente d'une droite et m' , la pente de la droite qui lui est perpendiculaire).

La droite CH a donc pour équation $y = -3x + b$ et passe par (5 ; 8), donc $8 = -3(5) + b$

Donc $b = 23$ et finalement la droite CH a pour équation $y = -3x + 23$

Le point H est donc donné par l'intersection de la droite

$$AB \equiv y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3y = x + 4 \Leftrightarrow x - 3y = -4$$

Et de la droite CH $\equiv y = -3x + 23 \Leftrightarrow 3x + y = 23$

$$\begin{cases} x - 3y = -4 & (1) \\ 3x + y = 23 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)*-3} \begin{cases} -3x + 9y = 12 \\ 3x + y = 23 \end{cases}$$

On additionne les 2 équations : $10y = 35 \Rightarrow y = 3,5 \left(= \frac{7}{2} \right)$

On injecte $y = \frac{7}{2}$ dans (1) $\Rightarrow x - 3\left(\frac{7}{2}\right) = -4 \Leftrightarrow x - \frac{21}{2} = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{2} + \frac{21}{2} = \frac{13}{2}$

Le point h recherché vaut donc $h\left(\frac{13}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

La bonne réponse est la réponse B

[Retour énoncé](#)

Correction Question 13

Il s'agit de simplifier l'expression $\cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

Les formules du style $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots$; $\sin\left(-3\frac{\pi}{2} - x\right) = \dots$ sont nombreuses et, à mon sens, inutiles à retenir par cœur. Les retenir par cœur me semble une grosse source d'erreur. Il vaut mieux les visualiser de sorte à pouvoir faire face à n'importe quelle formule sans vous tromper.

L'unique chose (fondamentale !) à retenir est que π vaut 180° et que le sens du cercle trigonométrique est anti-horloger (mais çà... vous devriez évidemment le savoir). De

même que le cosinus est la projection du rayon sur l'axe des X et le sinus, la projection du rayon sur l'axe des Y. C'est tout !

Je vous montre la démarche visuelle terme par terme. Par écrit, c'est un peu long, mais au brouillon, cela prend quelques secondes par terme !

Je trace un rayon (vert pointillé) qui fait un angle x quelconque d'environ 30° , que je projette sur l'axe X pour en obtenir le cosinus (en vert), et aussi sur l'axe Y pour en obtenir le sinus (en bleu).

- $\cos(3\pi - x)$: 3π , c'est 3 demi-tours (à partir de l'angle 0 et anti horloger, bien sûr), on arrive donc sur 180° (tous les 2 moitiés de tour, on revient à 0 !). Je retire de 180° , l'angle x , afin de visualiser $(3\pi - x)$. Je projette sur l'axe X pour visualiser $\cos(3\pi - x)$ et je m'aperçois qu'il vaut $-\cos(x)$. Imaginons, sur le dessin, que $\cos(x) \approx +0,8$, on voit bien que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \approx -0,8$, donc $-\cos(x)$.

Donc, $\cos(3\pi - x) = -\cos(x)$!

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$: $\frac{\pi}{2}$, c'est 1 quart de tour (à partir de l'angle 0, et anti horloger), on arrive donc sur 90° . Je rajoute l'angle x , afin de visualiser $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Je projette sur l'axe X pour visualiser $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et je m'aperçois qu'il vaut $-\sin(x)$. Imaginons, sur le dessin, que $\sin(x) \approx +0,5$, on voit bien que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \approx -0,5$, donc $-\sin(x)$.

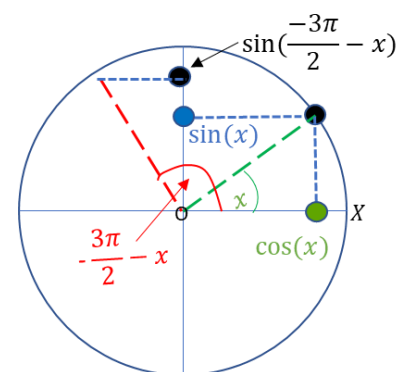
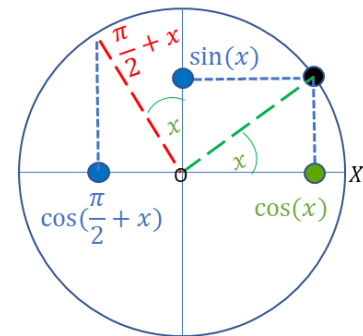
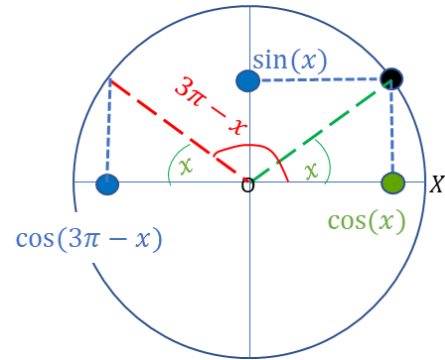
Donc, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

- $\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$: $-3\frac{\pi}{2}$, c'est 3 quarts de tours (à partir de l'angle 0 et horloger cette fois à cause du signe moins), on arrive donc sur 90° . Je retire de 90° , l'angle x , afin de visualiser $\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$. Je projette sur l'axe Y pour visualiser $\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right)$ et je m'aperçois qu'il vaut $\cos(x)$. Imaginons, sur le dessin, que $\cos(x) \approx 0,8$, on voit bien que $\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) \approx +0,8$, donc $\cos(x)$.

Donc, $\sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Et donc :

$$\cos(3\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos(x) - \sin(x) + \cos(x) = -\sin(x)$$



La bonne réponse est la réponse D

Mon conseil : entraînez-vous chez vous à refaire ces exercices de visualisation, vous verrez qu'après un brin d'entraînement vous le ferez mentalement, sans même avoir besoin d'un dessin !

Essayez par exemple avec :

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos(x)$
- $\sin\left(3\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$
- $\cos\left(3\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$
- $\cos\left(3\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(x)$

[Retour énoncé](#)

Correction Question 14

Le premier réflexe, quand on voit ce genre de question est de résoudre 3 systèmes de 2 équations à deux inconnues pour connaître les coordonnées des 3 sommets du triangle. Exactement le piège dans lequel sont tombés ... la quasi-totalité des solutions payantes 😂. Il est très peu probable que l'on vous fasse résoudre 3 systèmes dans une même question le jour du concours. Il y a donc forcément une **astuce** !

On a

$$d_1 \equiv y = 3x + 1$$

$$d_2 \equiv y = \frac{x}{2} + 1$$

$$d_3 \equiv y = 6 - 2x$$

Observez bien d_1 et d_2 ! Vous noterez assez vite que dans l'une et l'autre équation, lorsque $x = 0$, on a $y = 1$. Vous venez de trouver le premier point d'intersection : **$A(0; 1)$** !

Il y a forcément des chances que les autres soient aussi simples ...

En effet, observez maintenant d_1 et d_3 ! Vous noterez assez vite que dans l'une et l'autre équation, lorsque $x = 1$, on a $y = 4$. Vous venez de trouver le deuxième point d'intersection : **$C(1; 4)$** !

Et finalement, observez maintenant d_2 et d_3 ! Vous noterez assez vite que dans l'une et l'autre équation, lorsque $x = 2$, on a $y = 2$. Vous venez de trouver le troisième point d'intersection : **$B(2; 2)$** !

Il se peut que vous ne l'ayez pas vu tout de suite et que vous souhaitiez faire une esquisse rapide des droites en les faisant passer par des points particulièrement simples ($x = 0, x = 1, x = 2 \dots$). C'est aussi un très bon réflexe ! Et vous constaterez très vite dans votre figure que les points d'intersection étaient choisis volontairement simples 😊

Reste à calculer les longueurs de chaque segment en utilisant la définition classique de la distance entre 2 points :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

- $d(A, B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}$
- $d(A, C) = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{10}$
- $d(B, C) = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5}$

Le périmètre $\mathcal{P}$ vaut

$$\mathcal{P} = d(A, B) + d(A, C) + d(B, C) = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{10} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10} = \sqrt{20} + \sqrt{10}$$

La bonne réponse est la réponse C

[Retour énoncé](#)

Correction Question 15

On utilise la formule de l'écart-type à apprendre par cœur ou ... à retrouver sachant que contrairement à son apparence, elle est très facile à retrouver lorsqu'on comprend ce qu'elle fait !

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}\right)}$$

- On dispose de n données : $x_1, \dots, x_n$
- On calcule leur moyenne μ

- Pour chaque donnée, on calcule l'**écart** entre la donnée et la moyenne générale. Comme on peut avoir des résultats négatifs ou positifs, selon que la donnée est au-dessus ou en-dessous de la moyenne, on élève au carré pour n'avoir que des écarts positifs.
- On effectue ensuite la **moyenne** de ces **écarts**², c'àd qu'on effectue leur somme et qu'on divise par le nombre de données
- On passe le tout à la racine carrée pour «éliminer» le passage au carré juste avant.

Calculons a , connaissant la moyenne :

$$\frac{a + 3 + 4 + 5 + a + 4}{5} = 4 \Leftrightarrow (2a + 16) = 20 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Les données sont donc : 2, 3, 4, 5, 6. D'où :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{(4-2)^2 + (4-3)^2 + (4-4)^2 + (4-5)^2 + (4-6)^2}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse C

[Retour énoncé](#)

FIN
