

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

Métropole JOUR 2

MATHÉMATIQUES

Code officiel : 24-MATJ1ME2

Jeudi 20 juin 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

CORRIGÉ NON OFFICIEL par Laurent HARDY

Exercice 1

1. $P(Q)$ représente la probabilité d'avoir répondu « oui » que l'examen soit réussi ou non, c'ad, le pourcentage TOTAL de réponses «oui ». La réponse est donnée dans l'énoncé ! : $P(Q) = 0.917$.

En français, $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$ se lit, « la probabilité que l'étudiant a répondu « non » sachant qu'il a échoué à l'examen ».

La réponse est également donnée dans l'énoncé ! : $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0.65$.

2. 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;

98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

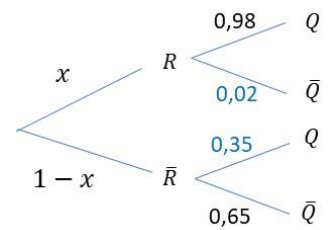
se traduit par : $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0.65$ et $P_R(Q) = 0.98$.

De ces données, on construit l'arbre :

(en noir, les données directes et en bleu, les données déduites (= 1 - donnée directe).

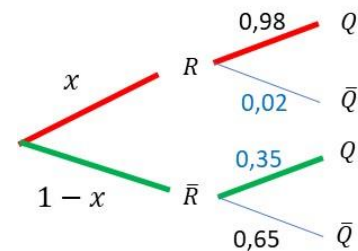
Nous avons vu que $P(Q) = 0.917$ représente la probabilité d'avoir dit 'oui' que l'examen ait été réussi ou raté.

Il faut donc faire la **somme** de toutes les branches qui amènent à « avoir dit oui », soit la somme des branches rouge, verte.



Mathématiquement,

$$\begin{aligned}
 P(Q) &= P(R \cap Q) + P(\bar{R} \cap Q) \\
 &= P(R) \cdot P_R(Q) + P(\bar{R}) \cdot P_{\bar{R}}(Q) \\
 &= x \times 0.98 + (1 - x) \times 0.35 = 0.917 \\
 &\Rightarrow 0.98x + 0.35 - 0.35x = 0.917 \\
 &\Rightarrow 0.63x = 0.567 \\
 &\Rightarrow x = 0.9
 \end{aligned}$$



3. La question est « quelle est la probabilité que l'étudiant ait réussi l'examen SI il a répondu 'oui' à la question ? » ou encore, mathématiquement, $P_Q(R)$?

Par définition, et comme on vient de l'appliquer à la question 2 :

$$P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{0.9 \times 0.98}{0.917} \approx 0.962 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

La probabilité que l'étudiant ait réussi l'examen s'il a répondu 'oui' à la question est d'environ 0,962 à 10^{-3} près.

4. N est donc la variable aléatoire qui suit une binomiale $\mathcal{B}(20; 0.615)$ et représente la note obtenue par un étudiant interrogé au hasard, laquelle note est un entier pouvant varier entre 0 et 20.

On cherche n tel que $P(N \geq n) \geq 0.65$ pour une binomiale $\mathcal{B}(20; 0.615)$.

Or, $P(N \geq n) = 1 - P(N < n) \stackrel{n \text{ entier}}{=} 1 - P(N \leq n - 1)$

Donc on cherche $1 - P(N \leq n - 1) \geq 0,65$

$$\Leftrightarrow -P(N \leq n - 1) \geq -0,35$$

$$\Leftrightarrow P(N \leq n - 1) \leq 0,35$$

A la calculatrice, on trouve $P(N \leq 10) = 0,202$ et $P(N \leq 11) = 0,3513$.

On voit donc que $n - 1 = 10$ satisfait la condition, et donc $n = 11$.

Donc, la directrice doit récompenser les étudiants qui ont eu au moins 11/20.

ATTENTION : sur de nombreuses corrections sur Internet, vous trouverez comme « bonne réponse » $n = 12$. C'est tout simplement scandaleux, **faux** et surtout sans aucune rigueur mathématique. En effet beaucoup de correcteurs (diplômés de quoi ??) considèrent que 0.3513, c'est « presque » 0.35 et donc, qu'à « peu de choses près », $0,3513 \lesssim 0,35$ (!) et qu'on peut donc prendre $n - 1 = 11$ et donc $n = 12$!!!

D'autres sites, plus sérieux, mais rares cependant, ne tergiversent pas et donnent bien $n = 11$ comme bonne réponse !

5. On rappelle que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme des espérances. Donc, puisque $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$, on a :

$$E(S) = E(N_1 + N_2 + \dots + N_{10}) = E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) + \dots + E(N_{10}).$$

Or, ces 10 variables aléatoires suivent toutes la même loi, elles ont donc toutes la même espérance. D'où, $E(S) = 10 \times E(N_r)$ où $r = 1, 2, \dots, 10$.

Dans le cas d'une binomiale N_r qui suit la loi $\mathcal{B}(n; p)$; $E(N_r) = n \times p$.

Donc, $E(S) = 10 \times E(N_r) = 10 \times 20 \times 0,615 = 123$.

Etant admis dans l'énoncé que les variables aléatoires N_1, N_2, etc sont **indépendantes**, on peut écrire $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + V(N_3) + \dots + V(N_{10})$.

(Attention : n'écrivez surtout pas que la variance d'une somme de variables est la somme des variances par linéarité, car ce serait faux : **PAS** de linéarité pour les variances !)

$$\Rightarrow V(S) = 10 \times V(N_r) = 10 \times n \times p \times (1 - p) = 10 \times 20 \times 0,615 \times 0,385 \\ = 47,355$$

6. a) M étant la somme S des variables aléatoires divisée par 10, M représente simplement la moyenne des notes des 10 candidats interrogés au hasard.

b) $E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{10} E(S) = \frac{123}{10} = 12,3$

Attention: pour la variance, vous avez dû voir la propriété suivante :

Soit $X_1; X_2; \dots; X_n$ n variables aléatoires indépendantes et $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme de ces n variables aléatoires et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la moyenne de ces n variables aléatoires, alors : $V(M) = \frac{1}{n^2} \cdot V(S)$

Ici, $V(M) = \frac{1}{10^2} \cdot 47,355 = \mathbf{0,47355}$

c) Dès qu'on vous demande de calculer une probabilité dont le résultat est « $\geq$ » à une valeur, et que juste avant, on vous a fait calculer une espérance et une variance, il faut immédiatement penser à la relation qui existe entre ces 3 propriétés et il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qui énonce :

Soit X , une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors pour tout réel a strictement positif, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

La question posée est : est-ce que $P(10,3 < M < 14,3) \geq 0,8$?

Pour se « raccrocher » à l'inégalité de Tchebychev, on va soustraire $E(M)$ partout !

$$\begin{aligned} \bullet \quad & P(10,3 < M < 14,3) \\ &= P(10,3 - E(M) < \textcolor{red}{M} - \textcolor{red}{E(M)} < 14,3 - E(M)) \stackrel{E(M)=12,3}{=} P(-2 < M - E(M) < 2) \\ &= P(|M - E(M)| < 2) = 1 - P(|M - E(M)| \geq 2) \end{aligned}$$

Or l'inégalité de Tchebychev donne : $P(|M - E(M)| \geq a) \leq \frac{V(M)}{a^2}$ ce qui dans notre cas donne :

$$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{2^2} = 0,118 \text{ , donc } 1 - P(|M - E(M)| \geq 2) \geq 0,882$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(10,3 < M < 14,3) \geq 0,8}$$

Exercice 2

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. On ajoute 15 g de chlore, c'ad, 15000 mg, dans 50 m^3 d'eau, soit, 50 000 L d'eau.
Le **taux de chlore ajouté** est donc simplement de $\frac{15\,000\,mg}{50\,000\,L} = 0,3 \frac{mg}{L}$.
2. Commençons par bien comprendre ce que veut dire, dans notre contexte,

$$v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3 \text{ avec } v_0 = 0,7.$$

Cela veut dire que le jour initial (jour '0'), on a une concentration de chlore de $0,7 \frac{mg}{L}$.

Le jour suivant ' $n+1$ ', pour différentes raisons (chimie, ensoleillement, etc), il ne restera que 92 % de la concentration et je rajoute une quantité de chlore (calculée en (1)) telle, que j'augmente la concentration de $0,3 \frac{mg}{L}$. Et ainsi, chaque jour qui passe !

- a) L'objectif est de **montrer par récurrence** que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ est vraie pour tout n entier naturel.

$$\text{Initialisation : } v_0 = 0,7 \Rightarrow v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944.$$

On a donc bien : $0,7 \leq 0,944 \leq 4 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée !

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Dans ce cas : $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

Multiplions par 0,92 : $0,92 v_n \leq 0,92 v_{n+1} \leq 3,68$

Ajoutons 0,3 : $0,92 v_n + 0,3 \leq 0,92 v_{n+1} + 0,3 \leq 3,98$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 3,98 \leq 4 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ est}$$

vraie (et donc $\mathcal{P}(n)$ puisque la propriété est valable quel que soit n). Donc, la propriété est héréditaire.

La propriété étant vraie pour $n = 0$ et étant héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N} : v_n \leq v_{n+1} \leq 4$

- b) Ce qu'on apprend de la partie a) est que la suite est croissante et majorée (à 4). On peut alors appliquer le théorème dit 'du point fixe' qui stipule que la suite va converger vers l , où l est solution de l'équation $x = 0,92 x + 0,3 \Rightarrow x = 3,75$.

Intuition ! : L'idée est simplement celle-ci : puisque la suite est **croissante et converge**, cela veut dire dans notre contexte de piscine qu'après un certain nombre de jours, suffisamment élevé, voire tendant vers l'infini, il va arriver un moment où rajouter du chlore ne servira plus à rien et où **le relevé quotidien**

du taux de chlore ne changera plus ! C-à-d que le taux de chlore v_{n+1} le jour 'n+1', sera le même que le jour 'n'. Et donc, on peut écrire, lorsque n devient grand, que $v_{n+1} \approx v_n = 0,92 v_n + 0,3$. C'est cela, l'idée du théorème du point fixe !

3. La conclusion de la question 2 est qu'à long terme, le taux de chlore va se stabiliser à $3,75 \frac{mg}{L}$. Or, les piscinistes recommandent de ne pas dépasser $3 \frac{mg}{L}$. On n'est donc pas conforme à la préconisation des piscinistes.

4.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0
    v=0.7
    while v ≤ s :
        n = n + 1
        v = 0.92*v + 0.3
    return n
```

On définit 's', le seuil à ne pas dépasser. TANT QUE le taux de chlore est inférieur au seuil ($v \leq s$), on peut recommencer l'opération le jour suivant ($n + 1$), on calcule le nouveau taux de chlore le jour suivant, et on boucle. Dès que le taux de chlore dépassera s , on sort de la boucle qui indiquera le numéro du jour n , où le seuil viendra juste d'être dépassé.

5. De manière très concrète (je l'ai fait sur <https://www.online-python.com/> ou aussi sur <https://console.basthon.fr/>), le code s'écrit plus simplement :

```
n=0
v=0.7
while v<=3:
    n=n+1
    v=0.92*v+0.3
print(n)
```

La réponse renvoyée est 17 et veut donc dire que le 17^{ème} jour, le taux de chlore aura dépassé $3 \frac{mg}{L}$ et que l'on sortira donc de la préconisation des piscinistes. En rajoutant simplement une instruction 'print(v)' au bout du code, vous obtiendrez que le taux de chlore ce jour-là, sera de $3.01 \frac{mg}{L}$.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Pour rappel de l'énoncé, on admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,08 y + \frac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme,

rajoutée dans la piscine chaque jour et on demande de justifier que la fonction $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ est solution de (E).

3 méthodes sont possibles !

1. **Méthode 1** : elle suppose que vous avez complètement oublié la solution générale de $y' = ay + b$ et vous ne savez plus comment la trouver par vous-même ...

Dans ce cas, il suffit simplement d'injecter $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ dans (E) et vérifier que l'égalité obtenue en conséquence, est vraie.

$$y = f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4} \Rightarrow y' = f'(x) = -0,08 C e^{-0,08x}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (E) &\Leftrightarrow -0,08 C e^{-0,08x} = -0,08 \left(C e^{-0,08x} + \frac{q}{4} \right) + \frac{q}{50} \\ &\Leftrightarrow -0,08 C e^{-0,08x} = -0,08 C e^{-0,08x} - 0,02 q + \frac{q}{50} \\ &\Leftrightarrow \cancel{-0,08 C e^{-0,08x}} = \cancel{-0,08 C e^{-0,08x}} - \frac{q}{50} + \frac{q}{50} \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{c'est vrai !} \end{aligned}$$

2. **Méthode 2** : elle suppose que vous connaissez par cœur la solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$. Au niveau Terminale, il s'agit de la **seule** équation différentielle que vous verrez, il n'est donc pas inutile (ni difficile !) de retenir sa solution générale par cœur, ce qui vous fera sauver du temps au BAC !

Rappel : la solution générale de $y' = ay + b$ est : $y = f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

Dans notre problème particulier : $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$.

Donc, la solution générale de $y' = -0,08 y + \frac{q}{50}$ est ;

$$y = Ce^{-0,08x} - \frac{\frac{q}{50}}{(-0,08)} = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}.$$

3. **Méthode 3** : elle suppose que vous ne vous souvenez plus de la solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$ mais que vous vous souvenez que la solution générale d'une équation différentielle (E) est la somme d'une solution de l'équation homogène $y' = ay$ et d'une solution particulière constante de (E) et aussi que $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

- La solution de l'équation de l'équation homogène $y' = ay$ est obtenue en passant y à gauche, puis en intégrant :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad y' = ay &\Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a \Leftrightarrow \int \frac{y'}{y} dy = \int a dy \Leftrightarrow \ln(y) = ay + k \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(y)} = e^{ay+k} \Leftrightarrow y = e^{ay} \cdot e^k = C \cdot e^{ay} \end{aligned}$$

- Pour la solution particulière constante, on cherche une fonction $h(x)$ qui soit une constante et qui vérifie $y' = ay + b$. On injecte $h(x)$ dans l'équation différentielle qui devient : $h' = ah + b$ mais ... $h(x)$ étant constante, on a $h'(x) = 0$! L'équation devient alors : $0 = ah + b$ dont la solution est $h(x) = -\frac{b}{a}$.

⇒ La somme de l'équation homogène et de la solution particulière est donc :
 $y = C e^{ay} - \frac{b}{a}$, ce qui est bien conforme à la solution donnée à la méthode
 (2) : $y = C e^{-0,08x} + \frac{q}{4}$.

2. a) $y(x) = C e^{-0,08x} + \frac{q}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = ?$

On a $\lim_{x \rightarrow \infty} -0,08x = -\infty$ et donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} C e^x = 0$.

Il reste donc, $\lim_{x \rightarrow \infty} C e^{-0,08x} + \frac{q}{4} = \frac{q}{4}$

b) « le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7 \text{ mg} \cdot L^{-1}$ » se traduit par : $y(0) = 0,7$.

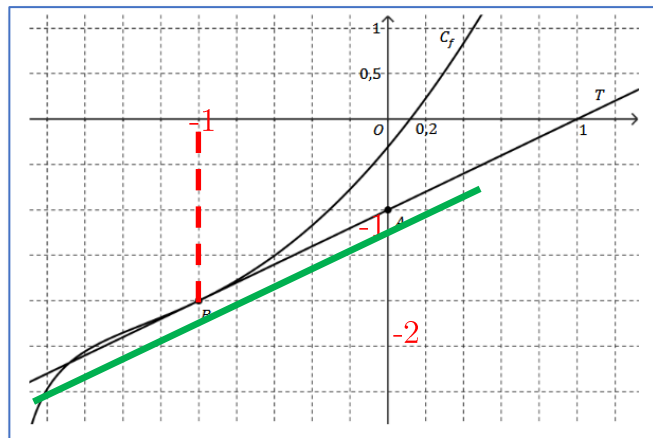
« On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2 \text{ mg} \cdot L^{-1}$ » se traduit par : $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 2$.

On a calculé ci-dessus que : $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \frac{q}{4}$ or on exige que $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 2$

$\Rightarrow \frac{q}{4} = 2$ et donc $q = 8$.

Aussi, on exige $y(0) = 0,7 \Leftrightarrow C e^{-0,08 \cdot 0} + \frac{q}{4} = 0,7 \Leftrightarrow C + \frac{8}{4} = 0,7 \Rightarrow C = -1,3$

Exercice 3



En rouge, les coordonnées rajoutées utiles pour résoudre le problème.

Partie A : exploitation du graphique

1. C'est une simple lecture directe du graphe ! $f(-1) = B$ (voir les tirets rouges)

$f'(-1)$ est la dérivée en $x = -1$, c-à-d, la pente de la tangente (verte) en -1 . De même, en lecture directe, on voit déjà que la pente est positive, et que pour 5 carrés horizontaux vers la droite (qui représente 1 unité de longueur), elle monte de 2 carreaux (qui représente également 1 unité de longueur, les échelles x et $f(x)$ n'étant pas les mêmes). La dérivée vaut donc $f'(-1) = \frac{1}{1} = 1$.

Si on souhaite être plus rigoureux, on note 2 points de passage facile de la droite tangente : elle passe par $(x_A = 0, y_A = -1)$ et $(x_B = 1, y_B = 0)$. Comme on sait que la dérivée est donnée par le coefficient directeur de la droite : $\frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$, on a $\frac{0 - (-1)}{1 - 0} = 1$.

Donc, $f'(-1) = 1$

2. On observe que vers $x = -1,4$, C_f est clairement concave, alors qu'à droite de $x = -1$, C_f est clairement convexe. Donc, **non, elle n'est pas convexe sur tout son ensemble de définition**, et qui plus est, on peut deviner visuellement que le point d'inflexion (qui la fait passer de concave à convexe) se trouve aux alentours de -1 . (ce point sera précisément calculé dans la partie B, question 6 !).

3. A priori, $\mathcal{C}_f$ ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses, ce qui confirme que $f(x) = 0$ n'aurait qu'une seule solution qui, visuellement se situe vers $x = 0,1$.

Partie B : étude de la fonction f .

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$$

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 2x - 1 + \lim_{x \rightarrow -2} \ln(x + 2)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow -2} \ln(x + 2)$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow -2} x + 2 = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$$

$$\text{Par la somme : } \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 2x - 1 + \lim_{x \rightarrow -2} \ln(x + 2) = -1 - \infty = -\infty$$

Puisqu'en approchant la fonction en $x = -2$, celle-ci tend vers $-\infty$, cela veut dire que $x = -2$ représente une asymptote verticale.

$$2. f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$$

Il est impératif de retenir que : $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2} = \frac{(2x + 2) \cdot (x + 2) + 1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$$

$$\Rightarrow \text{Pour tout } x > -2, f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

3. Rappelons : $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; il existe une racine α près de $x = 0,1$ telle que $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Et aussi, } f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}.$$

Or, sur $] -2; +\infty[$, le dénominateur $x + 2 > 0$. Le discriminant du numérateur $2x^2 + 6x + 5$ vaut : $\Delta = 36 - 4(2)(5) = -4$. Donc, $2x^2 + 6x + 5$ n'admet aucune racine réelle et est toujours du signe du coefficient de x^2 (c-à-d, 2), donc toujours > 0 .

Dès lors, $f'(x)$ est toujours > 0 sur $] -2; +\infty[$ et donc, $f(x)$ est strictement croissante sur $] -2; +\infty[$.

x	-2	α	∞
Signe de $f'(x)$		+	+
Variation de $f(x)$	- ∞	0	→ + ∞

4. On a vu en (3) que $f(x)$ passe de $-\infty$ à $+\infty$ et qu'en plus $f(x)$ est **strictement croissante**. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure que $f(x)$ coupe **une fois** l'axe des abscisses et ne le coupe **qu'une seule fois** (car **strictement croissante**). **$f(x) = 0$ admet alors une solution unique α sur $] -2; +\infty[$.**

Un simple examen visuel du graphe montre que α vaut environ 0,1.

Avec votre calculatrice, il suffit d'injecter quelques valeurs autour de 0,1. Ainsi, par exemple, $f(0,11) = -0,212 < 0$ et $f(0,12) = 0,058 > 0$. On conclut que $f(x)$ coupe donc l'axe des abscisses entre ces 2 valeurs. Puisqu'on demande une précision de 'seulement' 10^{-2} sur la valeur, on peut raisonnablement conclure que **$\alpha \approx 0,12$ à 10^{-2} près.**

Pour info, Geogebra fournit une réponse plus précise : $\alpha \approx 0,11785 \dots$

5. L'information obtenue en (4) permet de finaliser le tableau de variations de $f(x)$.
 $f(x)$ est strictement croissante de racine α , négative à gauche de α et positive à sa droite. Donc,

x	-2	α	∞
Variation de $f(x)$	- ∞	- 0 +	→ + ∞

6. Rappelons qu'un point d'inflexion sur une fonction $f(x)$ est le point où cette fonction passe de concave à convexe ou inversement. Ce point est caractérisé par une dérivée seconde nulle, c-à-d, x tel que $f''(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$$

On a déjà calculé plus haut $f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}$. On rappelle : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - uv'}{v^2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f''(x) &= \frac{(4x+6) \cdot (x+2) - (2x^2+6x+5) \cdot (1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

Le dénominateur $(x+2)^2$ est par définition toujours positif et n'influencera donc en rien le signe de $f''(x)$. Il reste à calculer le signe du numérateur et pour ce faire il faut d'abord trouver ses racines.

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - (4) \cdot (2) \cdot (7) = 64 - 56 = 8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{8}$

$2x^2 + 8x + 7$ a donc 2 racines : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{8}}{4} = \frac{-8 - \sqrt{8}}{4} = \frac{-8 - 2\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

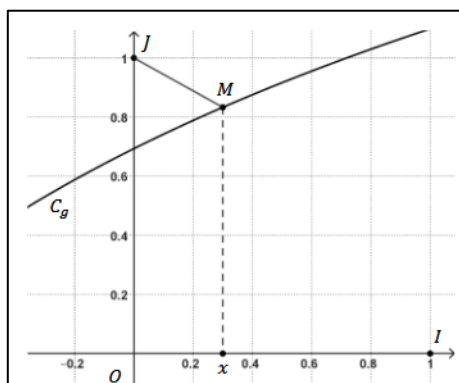
$$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{8}}{4} = \frac{-8 + \sqrt{8}}{4} = \frac{-8 + 2\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or, nous travaillons sur le domaine de définition $] -2; +\infty[$. La racine x_1 étant clairement < -2 , on ne s'en occupe plus et il reste la racine $x_2 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	-2	$-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	∞			
Variation de $f''(x)$	- ∞	-	0	+	+	$+\infty$

Ainsi, sur l'intervalle $] -2, +\infty[$, $f''(x)$ admet une seule racine et passe de **négative** à **positive** en ce point. On conclut que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion sur $] -2, +\infty[$, il s'agit de $x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et où la fonction $f(x)$ passe de **concave** à **convexe**.

Partie C : une distance minimale



1. Rappelons que la distance entre 2 points de coordonnées $M (M_x, M_y)$ et $J (J_x, J_y)$ égale $\sqrt{(J_x - M_x)^2 + (J_y - M_y)^2}$ (ce n'est qu'une simple application directe du théorème de Pythagore !). Donc, dans notre problème, $h(x)$ n'est rien d'autre que cette distance élevée au carré (l'énoncé précise $h(x) = JM^2$).

Donc, $h(x) = (J_x - M_x)^2 + (J_y - M_y)^2$

Les coordonnées de J sont $J(0; 1)$ et celles de M sont $M(x, g(x))$.

Donc, $h(x) = (0 - x)^2 + (1 - \ln(x + 2))^2 = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$ (puisque bien sûr, $(a - b)^2 = (b - a)^2$).

2. a) Il est admis que $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$. Or, sur $] -2, +\infty[$, $\frac{2}{x+2} > 0$ et n'influence donc pas les variations de $h'(x)$. Dès lors, $h'(x)$ se comporte exactement comme $f(x)$: même signe, même racine ! (voir partie 2 question 5).

On peut donc déduire le tableau de variation de $h(x)$ sur $] -2, +\infty[$:

x	-2	α	∞
Variation de $f(x)$	$-\infty$ -	0	$+\infty$ +
Variation de $h'(x)$	$-\infty$ -	0	$+\infty$ +
Variation de $h(x)$			

- b) Du tableau précédent, on voit que $h'(x)$ est négative à gauche de α puis repasse positive à droite de α . On conclut que $h(x)$ passe par un minimum en $x = \alpha$ et aussi que sa valeur est $h(\alpha)$. α est donc le minimum de $h(x)$ qui représente JM^2 . Mais est-ce aussi le minimum de $\sqrt{h(x)}$ qui représente JM ?

Oui ! car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc, le minimum de $h(x)$ est aussi le minimum de $\sqrt{h(x)}$!

3. a) Nous savons que $f(\alpha) = 0$, donc trivialement : $\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0$

Et donc, $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$

b) Rappelons que $g(x) = \ln(x + 2)$ (voir énoncé partie C) et que les coordonnées des points J et M_α sont : $J(0; 1)$ et $M_\alpha(\alpha; g(\alpha))$.

- D'une part, $g(x) = \ln(x + 2)$, donc la dérivée $g'(x) = \frac{1}{x+2}$ représente la valeur de la pente en tout point x et en particulier, en α , la pente (ou le coefficient directeur si vous préférez) est : $\frac{1}{\alpha+2}$.
- D'autre part, la pente, ou coefficient directeur de la droite JM_α est donné par :

$$\frac{g(\alpha) - 1}{\alpha - 0} = \frac{\ln(\alpha + 2) - 1}{\alpha} \stackrel{\text{question 3a}}{=} \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = -(2 + \alpha)$$

Multiplions les 2 coefficients directeurs : $\frac{1}{\alpha+2} \times (-)(2 + \alpha) = -1$.

Ce qui justifie, comme rappelé dans l'énoncé, que la tangente de $\mathcal{C}_g$ en α et la droite JM_α sont perpendiculaires ! ■

Exercice 4

Affirmation 1 :

Il y a 2 choses à vérifier.

a) Il faut vérifier que les droites $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

- $\overrightarrow{AC}(x_c - x_a; y_c - y_a; z_c - z_a) = (4 - 2; 4 - 0; 1 - 0) = (2; 4; 1)$
- $\overrightarrow{AD}(x_d - x_a; y_d - y_a; z_d - z_a) = (0 - 2; 0 - 0; 4 - 0) = (-2; 0; 4)$

Il n'est clairement pas possible de trouver un λ tel que $(2; 4; 1) = \lambda(-2; 0; 4)$.

Dès lors, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et forment bien un plan.

- b) $A(2; 0; 0) \in \mathcal{P}$? Oui car : $8 \cdot 2 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 16 = 0$
 $C(4; 4; 1) \in \mathcal{P}$? Oui car : $8 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 - 16 = 0$
 $D(0; 0; 4) \in \mathcal{P}$? Oui car : $8 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 16 = 0$

En conclusion, **A, C et D** appartiennent bien au plan $8x - 5y + 4z - 16 = 0$

L'affirmation 1 est VRAIE.

Affirmation 2 :

Grâce à l'affirmation 1 (vraie), on sait que A, C et D sont coplanaires et appartiennent au plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$. Si B est coplanaire à A, C et D , cela impliquerait que D appartient à $\mathcal{P}$.

$B(0; 4; 3) \in \mathcal{P}$? NON, car : $8 \cdot 0 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 16 \neq 0$

L'affirmation 2 est FAUSSE.

Affirmation 3 :

Le réflexe à avoir est : « sécante = elles se coupent = le système d'équation des 2 droites doit avoir une solution ! »

- $\overrightarrow{AC}(x_c - x_a; y_c - y_a; z_c - z_a) = (4 - 2; 4 - 0; 1 - 0) = (2; 4; 1)$
- $\overrightarrow{BH}(x_h - x_b; y_h - y_b; z_h - z_b) = (-1 - 0; 1 - 4; 2 - 3) = (-1; -3; -1)$

$\overrightarrow{AC}$ a comme vecteur directeur $(2; 4; 1)$ et passe par $A(2; 0; 0)$.

Sa représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 + 4t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\overrightarrow{BH}$ a comme vecteur directeur $(-1; -3; -1)$ et passe par $B(0; 4; 3)$.

Sa représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 0 - t' \\ y = 4 - 3t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Si les 2 droites sont sécantes, cela veut dire qu'elles se coupent au même point $(x; y; z)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + 2t = -t' \\ 4t = 4 - 3t' \\ t = 3 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2t = -t' \\ 4t = 4 - 3t' \\ t' = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2t = -3 + t \\ 4t = 4 - 3(3 - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = -5 \end{cases}$$

$$t = -5 \Rightarrow t' = 8$$

Le système admet donc une solution $\rightarrow$ les 2 droites sont sécantes.

Elles le sont en $x = -8; y = -20; z = -5$

L'affirmation 3 est VRAIE.

Affirmation 4 :

Commençons par vérifier que $H \in \text{plan}(ABC)$ – si non, tout s'arrête !

$$H(-1; 1; 2) \in x - y + 2z - 2 = 0 ? \text{ Oui car : } -1 - 1 + 2 \cdot 2 - 2 = 0$$

Le vecteur directeur de $\overrightarrow{DH}$ est donné par :

$$\overrightarrow{DH}(x_h - x_d; y_h - y_d; z_h - z_d) = (-1 - 0; 1 - 0; 2 - 4) = (-1; 1; -2) = -(1; -1; 2)$$

L'équation du plan étant $x - y + 2z - 2 = 0$, on en tire immédiatement le vecteur directeur de sa normale : $\vec{n} = (1; -1; 2)$

On voit donc que le vecteur directeur de $\overrightarrow{DH}$ est proportionnel (donc colinéaire) au vecteur normal (càd perpendiculaire) $\vec{n}$ du plan. $\overrightarrow{DH}$ est donc perpendiculaire au plan (ABC) , et en conclusion : le point H (qui $\in \text{plan}(ABC)$) est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

L'affirmation 4 est VRAIE.

FIN