QUESTIONS

ET CORRIGÉS DÉTAILLÉS

DU CONCOURS DE MATHS

POUR L'ENTRÉE EN ÉCOLE DE

MÉDECINE / DENTISTERIE

Belgique – Juillet 2022

Corrections rédigées par Laurent HARDY ©

Question 1

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Parmi les ensembles suivants, quel est celui qui correspond au domaine de définition de la fonction $f \circ f$ où le symbole $\circ$ désigne la composition de fonctions ?

A. $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
B. $\mathbb{R}\backslash\{-1, -\frac{1}{2}\}$
C. $\mathbb{R}\{-\frac{1}{2}\}$
D. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Indices Correction détaillée

Question 2

On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} (t^2-9)x + (2t-6)y = 15 - t \\ (t+3)x + (t-3)y = t \end{cases}$$

Où t est une constante réelle non nulle et où les inconnues x et y sont également réelles.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

A. Le système est impossible pour $t = -5$
B. Le système est indéterminé pour $t = -3$
C. Le système admet une solution pour $t = 1$
D. Le système est indéterminé pour $t = 5$

Indices Correction détaillée

Question 3

Une culture de cellules croît de manière exponentielle. On constate que le nombre de cellule double en 20 jours.

Combien de jours faudra-t-il attendre pour que la population de cellules soit multipliée par huit par rapport à sa valeur initiale ?

A. 20 jours
B. 60 jours
C. 80 jours
D. 160 jours

Indices **Correction détaillée**

Question 4

On considère le système linéaire

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels non nuls, x et y étant les inconnues réelles.

Parmi les propositions concernant ce système, laquelle est correcte pour toutes les valeurs de a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2.

A. Ce système admet toujours une solution
B. Ce système n'admet jamais $(0,0)$ comme solution
C. Ce système admet toujours une infinité de solutions
D. Ce système peut admettre exactement 2 solutions distinctes

Indices **Correction détaillée**

Question 5

On considère la droite d'équation $y = x + 1$ et la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 1$.

Que vaut l'aire de la région délimitée par ces 2 courbes entre les 2 points d'intersection ?

A. $28/3$
B. $29/3$
C. $31/3$
D. $32/3$

Indices Correction détaillée

Question 6

On considère le polynôme P défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels. On sait que $x = 1$ et $x = 3$ sont deux racines de P et que $P(2) = 2$.

Que vaut $P(0)$?

A. -6
B. -4
C. 4
D. 6

Indices Correction détaillée

Question 7

Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère le parallélogramme de sommets :
$A(2;1); B(5;4); C(\alpha\,;\beta); D(50;3)$ où les constantes α, β vérifient $\alpha > 50$ et $\beta > 4$.

Que vaut $(\alpha;\beta)$?

A. $(51\,;7)$
B. $(52\,;5)$
C. $(53\,;6)$
D. $(55\,;5)$

Indices Correction détaillée

Question 8

Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points :
$A(0;0); B(x;3); C(x\,;0)$ où le nombre réel x vérifie $x > 0$ et $\widehat{CAB} = 30°$.

Que vaut x ?

A. 3
B. $2\sqrt{3}$
C. $3\sqrt{2}$
D. $3\sqrt{3}$

Indices Correction détaillée

Question 9

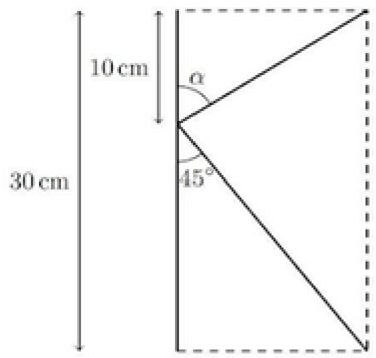
Dans le plan muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la courbe (C) d'équation $y = 2x^2 - 8$.
Soit d_1, la droite tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ et d_2 la droite d'équation $y = -x$.
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2 ?

A. $(0; 0)$
B. $(1\,; -1)$
C. $(2; -2)$
D. $\left(\frac{\sqrt{33}-1}{2}\,;\, -\frac{\sqrt{33}-1}{2}\right)$

Indices   Correction détaillée

Question 10

Un publicitaire crée un logo en forme de 'K' (voir le schéma)
Ce logo est formé d'une ligne verticale de 30 cm et de 2 lignes obliques partant d'un même point sur la ligne verticale, située 10 cm sous l'extrémité supérieure de la ligne verticale. Les quatre extrémités du 'K' correspondent aux coins d'un rectangle.



Le schéma n'est pas à l'échelle !
Sachant que l'amplitude de l'angle entre la ligne verticale et la ligne oblique vers le bas est de 45°, que vaut $\sin(\alpha)$?

A. $2/3$
B. $\sqrt{2}/2$
C. $2\sqrt{5}/5$
D. 1

Indices   Correction détaillée

Question 11

On considère la série statistique suivante : $-1, -x^2, 2x, -3x^2, -1$, dont la moyenne est notée m.
Laquelle des propositions suivantes est vraie quel que soit le nombre réel x ?

A. $m > 0$
B. $m < -2$
C. $m = -1$
D. $m \neq 0$

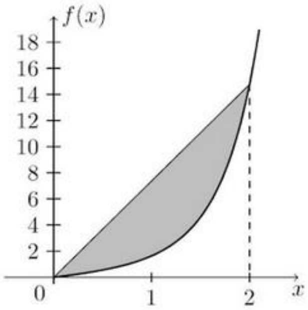
Indices   Correction détaillée

Question 12

On considère la fonction f définie explicitement par l'expression :

$$f(x) = x\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

Que vaut l'aire (en gris sur le graphique) comprise entre le segment de droite joignant les deux points $(0,0)$ et $(2, f(2))$et la courbe définie par la fonction f située sous le segment ?



A. $e^2 - 1$
B. $e^2 + 1$
C. $2e^2 - 1$
D. $2e^2$

Indices   Correction détaillée

Question 13

Un médecin doit administrer 50 ml d'une solution glucosée contenant 5 mg de glucose par 100 ml de solution à un patient.

Le médecin a deux solutions à sa disposition : une contenant 4 mg de glucose par 100 ml de solution, et une autre contenant 9 mg de glucose par 100 ml de solution. Il doit donc mélanger ces deux solutions pour obtenir les 50 ml de la solution souhaitée.

Si le médecin ne souhaite pas gaspiller ces produits, combien de ml de solution contenant 4 mg de glucose par 100 ml doit-il prélever pour obtenir 50 ml de solution glucosée contenant 5 mg de glucose par 100 ml ?

A. 10 ml
B. 20 ml
C. 25 ml
D. 40 ml

Indices Correction détaillée

Question 14

Soit f, une fonction réelle, définie pour tout nombre réel x et dérivable au moins deux fois, croissante et à concavité tournée vers le haut.

On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x^2)$, également sur la droite réelle.

Parmi les propositions suivantes décrivant le comportement de la dérivée seconde g'' de la fonction g, quelle est celle qui est vraie ?

A. $g"(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{R}$
B. $g"(x) < 0$ pour $x < 0, g''(0) = 0$ *et* $g'' > 0$ pour $x > 0$
C. $g"(x) > 0$ pour $x < 0, g''(0) = 0$ *et* $g'' < 0$ pour $x > 0$
D. $g"(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$

Indices Correction détaillée

Question 15

Dans un magasin, chaque article possède un prix de base auquel on ajoute 20 % de ce prix pour établir le prix affiché à faire payer au client lors de son achat (ce pourcentage représente la TVA).
Durant les soldes, une personne achète un article dont le prix de base (sans TVA) est de x €. Elle obtient une réduction de 40 % sur le prix affiché (TVA comprise).
Quel prix la personne va-t-elle payer pour cet article TVA comprise et en euros) durant ces soldes ?

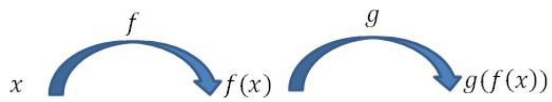
A. $0.64\ x$
B. $0.72\ x$
C. x
D. $1.40\ x$

Indices **Correction détaillée**

INDICES

Indice Question 1

Il s'agit du principe des fonctions composées.
Pour faire simple, on prend x, on l'injecte une première fois dans f pour obtenir $f(x)$ et on injecte le résultat obtenu dans une autre fonction g, pour obtenir $g\big(f(x)\big)$, aussi noté $(g \circ f)(x)$.



Par exemple : $\ln(x^2)$ doit être vu comme $f(x) = x^2$ et $g(x) = \ln(x)$.
Rien n'interdit, comme dans la question d'examen, de composer la fonction f deux fois en suivant, ce que l'on notera $f \circ f$. Par exemple, si $f(x) = x^2 + 2x + 1$, alors $(f \circ f)(x) = (x^2 + 2x + 1)^2 + 2(x^2 + 2x + 1) + 1 =$ ….

Retour énoncé

Indice Question 2

Rappelez vous qu'un système de 2 équations à 2 inconnues, c'est en fait un système où chaque équation représente une droite dans le plan.
Face à 2 droites dans le plan, 3 cas sont possibles :

- Soit il y a UNE solution, càd que les 2 droites se coupent et la solution est le point d'intersection.
- Soit il y 0 solution, càd que les 2 droites sont parallèles et ne se coupent jamais : le **système est IMPOSSIBLE** à résoudre.
- Soit il y a une infinité de solutions car les 2 droites sont simplement confondues (les mêmes) et se coupent donc infiniment … : le **système est INDÉTERMINÉ**
- Dans notre question, il y a des paramètres. Selon leur valeur, vous tomberez dans un cas ou dans un autre !
- Parfois des réponses de QCM suggèrent : « le système accepte 2 solutions ». Bien sûr, éliminez directement cette réponse ! 2 droites ne peuvent PAS se couper … en 2 endroits différents !

Retour énoncé

Indice Question 3

Pour cette question, la formule de la croissance exponentielle est … **totalement inutile** !! C'est bien plus simple que cela 😉 !

Retour énoncé

Indice Question 4

Rappelez vous qu'un système de 2 équations à 2 inconnues, c'est en fait un système où chaque équation représente une droite dans le plan.
Face à 2 droites dans le plan, 3 cas sont possibles :

- Soit il y a UNE solution, càd que les 2 droites se coupent et la solution est le point d'intersection.
- Soit il y 0 solution, càd que les 2 droites sont parallèles et ne se coupent jamais : le **système est IMPOSSIBLE** à résoudre.
- Soit il y a une infinité de solutions car les 2 droites sont simplement confondues (les mêmes) et se coupent donc infiniment … : le **système est INDÉTERMINÉ**
- Dans notre question, il y a des paramètres. Selon leur valeur, vous tomberez dans un cas ou dans un autre !
- Parfois des réponses de QCM suggèrent : « le système accepte 2 solutions ». Bien sûr, éliminez directement cette réponse ! 2 droites ne peuvent PAS se couper … en 2 endroits différents ! C'est le cas de cette question !
- Le fait que a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels **non nuls** est capital pour trouver la bonne réponse !
- Rappelez-vous aussi que TOUTE droite qui passe par $(0,0)$ est forcément de la forme $y = ax$ (càd que le $'b'$ de $y = ax + b$ est nul). Cette indication (+ la précédente) doit vous amener directement à la bonne réponse ! 😉

Retour énoncé

Indice Question 5

En choisissant quelques points faciles, tracez la droite ET la parabole, afin de visualiser votre problème.
Pour la droite, prenez par exemple $x = 0$ et $x = 1$.
Pour la parabole, prenez par exemple $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

Trouvez ensuite le point d'intersection de la droite et de la parabole (c'est évidemment la solution de l'équation $x + 1 = x^2 - 3x + 1$ – très facile !).
Calculer l'aire revient bien sur à faire le calcul d'une intégrale. A ce niveau de l'examen, ne vous posez pas trop de questions …

- Regardez quelle fonction est au-dessus de l'autre
- L'aire comprise entre les 2 sera
$$\int_{1er\ pt\ d'intersection}^{2eme\ pt\ d'intersection} (fonction\ au\ dessus - fonction\ en\ dessous)\, dx.$$

Retour énoncé

Indice Question 6

Puisqu'on vous donne les 2 racines du polynôme, comment pouvez-vous le réécrire plus simplement en factorisant pour faire apparaître directement ces 2 racines ?

Retour énoncé

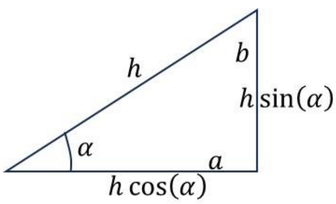
Indice Question 7

Dans un parallélogramme, les 2 côtés opposés sont parallèles et … de mêmes **longueurs**.
Tracez grossièrement le parallélogramme au brouillon et estimez au 'nez' où se trouve le 4ème point manquant. La méthode et la réponse vont vous apparaître très simplement, surtout si vous avez du papier brouillon quadrillé (mais pas indispensable bien sûr) !

Retour énoncé

Indice Question 8

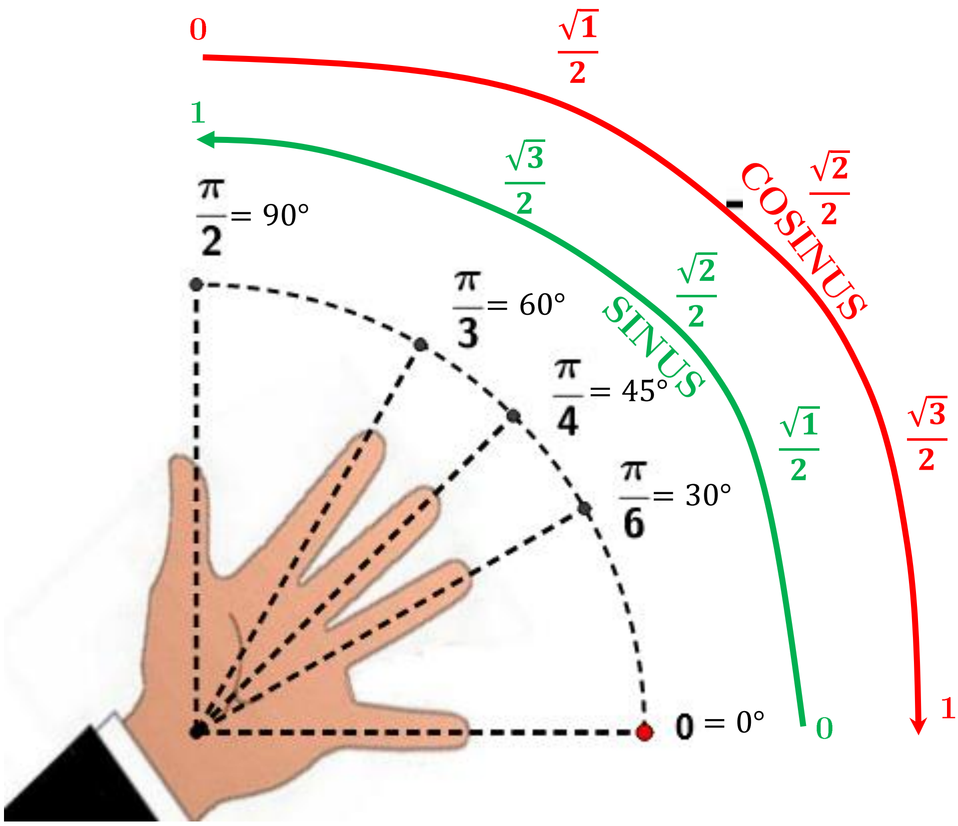
Pour cet examen, une connaissance des formules de base triangles rectangle est indispensable. La troisième, bien qu'elle se déduise des 2 premières, vous fera gagner du temps !



- $a = h \cdot \cos\alpha$
- $b = h \cdot \sin\alpha$
- $\frac{b}{a} = \tan\alpha$
- $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagore)

De même, la calculatrice étant interdite à cet examen, la connaissance des sinus et cosinus élémentaires est indispensable.

Voici LE truc pour les retenir (bien que le mieux soit aussi de le visualiser !...) :



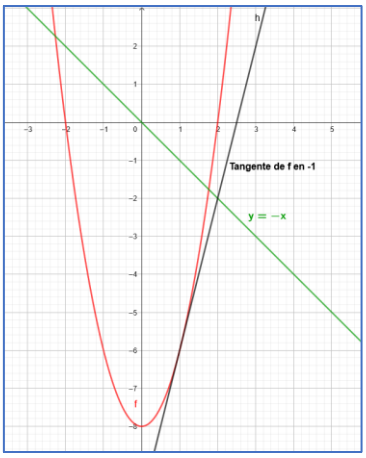
$$Sinus\ (angle) = \frac{\sqrt{nombre\ de\ doigt\ en\ dessous\ de\ l'angle}}{2}$$

$$Cosinus\ (angle) = \frac{\sqrt{nombre\ de\ doigt\ au\ dessus\ de\ l'angle}}{2}$$

[Retour énoncé]

Indice Question 9

Toujours commencer par un graphe rapide mais propre des différentes courbes et droites. Dans ce cas c'est simple. Pour la parabole, prendre 3 points de passage facile tels que $x = -2, x = 0x, x = 2$.



L'équation de la tangente en un point $\boldsymbol{a}$ est donnée par la définition même de la dérivée :

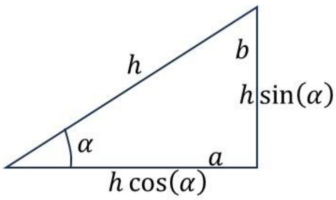
$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⇨ $$y \overset{f(x)=y}{=} \boldsymbol{f'(a)(x-a) + f(a)}$$

[Retour énoncé]

Indice Question 10

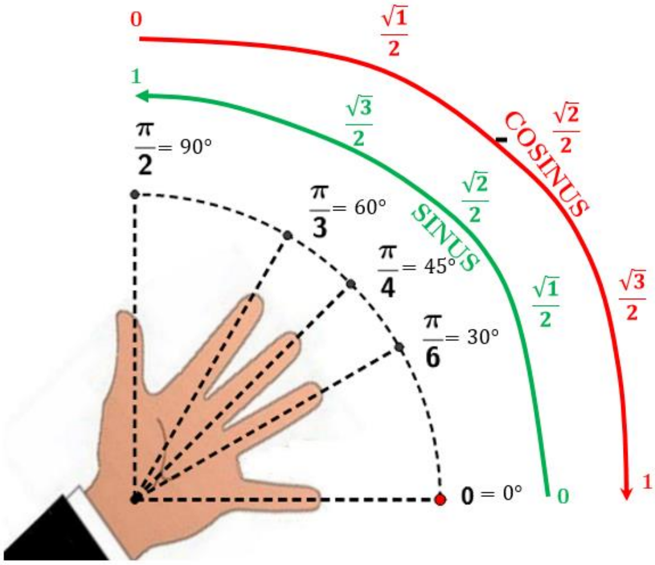
Pour cet examen, une connaissance des formules de base triangles rectangle est indispensable. La troisième, bien qu'elle se déduise des 2 premières, vous fera gagner du temps !



- $a = h \cdot \cos\alpha$
- $b = h \cdot \sin\alpha$
- $\frac{b}{a} = \tan\alpha$
- $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagore)

De même, la calculatrice étant interdite à cet examen, la connaissance des sinus et cosinus élémentaires est indispensable.

Voici LE truc pour les retenir (bien que le mieux soit aussi de le visualiser !...) :



$$Sinus\ (angle) = \frac{\sqrt{nombre\ de\ doigt\ en\ dessous\ de\ l'angle}}{2}$$

$$Cosinus\ (angle) = \frac{\sqrt{nombre\ de\ doigt\ au\ dessus\ de\ l'angle}}{2}$$

Retour énoncé

Indice Question 11

Il faut traiter ce problème comme un simple problème de moyenne arithmétique.
Le fait qu'il y ait un paramètre m fera que cette moyenne peut avoir des valeurs impossibles … ou non !
Une moyenne est donnée par $m = \frac{Somme\ des\ éléments}{nombre\ d'éléments}$
D'autre part, il faut évidemment savoir calculer les racines d'un trinôme du second degré !

Retour énoncé

Indice Question 12

- Une droite quelconque dans le plan est de la forme $y = ax + b$. Dès lors qu'elle passe par $(0{,}0)$, son équation se réduit à $y = ax$ où $'a'$ est la pente de la droite.
- De manière générale, la pente d'une droite qui passe par 2 points $(x_a; y_a)$, $(x_b; y_b)$ est donnée par : $a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$. En particulier, pour une droite qui passe par $(0{,}0)$, la pente vaut $a = \frac{y_b}{x_b}$
- Pour calculer l'aire entre 2 fonctions f et g, on regarde laquelle est au-dessus de l'autre, disons f. L'aire se calcule par : $\mathcal{A} = \int f - \int g$
  - Nb, si on se trompe quant à savoir laquelle est au-dessus et en dessous, ce n'est pas très grave, sauf qu'on obtient une aire … négative, dont il faudra bien sûr prendre la valeur absolue pour obtenir une aire positive.
- Un des nombreux principes de calcul intégral est l'intégration par substitution. Le principe de base de l'intégrale par substitution est basé sur la dérivée d'une composée de 2 fonctions :

  $$(F(g(x))' = g'(x) \cdot F'\big(g(x)\big)$$

  Intégrons …

  $$\int (F\big(g(x)\big)' = \int g'(x) \cdot F'\big(g(x)\big) \;\Leftrightarrow F(g(x) = \int g'(x) \cdot F'\big(g(x)\big)$$

  On renverse l'égalité pour voir plus clair …

  $$\int g'(x) \cdot F'\big(g(x)\big) = F(g(x))$$

  En français … je dois résoudre une intégrale avec une fonction composée qui contient un "bloc" $g(x)$. Si par chance, la dérivée de ce bloc, càd, $g'(x)$ est contenu dans l'intégrale, la solution finale sera simplement l'intégrale de F', soit F. Cette méthode ne marche évidemment pas à tous les coups mais pour cet examen, bien sûr que si !
  Alors en pratique, comment ça marche ?

  Calculons $\int 2x\cos(x^2)\ dx$!

  - Qu'est-ce qui se trouve "dans" le cosinus ? Réponse : x^2
  - Quelle est la dérivée de x^2 ? Réponse: $2x$!
  - Est-ce que $2x$ se trouve devant le cosinus ? oui !
  - **C'est FINI** ! $\int 2x\cos(x^2)\ dx \;= \sin(x^2)$!!

  Autre exemple: Calculons $\int x^2 \sin(x^3)\ dx$

- Qu'est-ce qui se trouve "dans" le sinus ? Réponse : x^3
- Quelle est la dérivée de x^3 ? Réponse: $3x^2$!
- Est-ce que $3x^2$ se trouve devant le sinus ? Presque … il manque le 3!
- Je rajoute le 3 qui me manque ET je multiplie par $\frac{1}{3}$ pour ne rien changer. L'intégrale à calculer devient : $\frac{1}{3}\int 3\, x^2 \sin(x^3)\ dx$
- Est-ce que $3x^2$ se trouve devant le sinus ? Maintenant, oui !
- **C'est FINI** ! $\int x^2 \sin(x^3)\ dx \quad = -\frac{1}{3} \cos(x^3)$!!

Si vous préférez la même méthode, de manière plus formelle, d'autres personnes font comme ceci :

Calculons $\int 2x \cos(x^2)\ dx$!

- Posons $x^2 = u$
- $2x\ dx = du$
- L'intégrale à calculer devient $\int \cos(u)\ du$
- C'est fini ! $\int 2x \cos(x^2)\ dx = \int \cos(u)\ du \ = \sin(u) = \sin(x^2)$

[Retour énoncé]

Indice Question 13

Revoyez la notion de moyenne pondérée, càd, par exemple comment calculer la note finale d'une année scolaire tenant compte du fait que tout au long de l'année plusieurs note ont été donnée avec un poids différent.

https://www.educastream.com/fr/statistiques-moyenne-simple-moyenne-ponderee-4eme

Le principe de base est $notation = \frac{notation\ 1 * poids\ 1 + \cdots . + notation\ n * poids\ n}{poids\ 1 + \cdots + poids\ n}$

[Retour énoncé]

Indice Question 14

Considérez x^2 comme une fonction, par exemple $h(x) = x^2$

L'énoncé se lit alors : $g(x) = f\big(h(x)\big)$!

On a donc affaire à une fonction composée.

La dérivée d'une fonction composée est donnée par :

$$\boldsymbol{g'(x) = h'(x) \cdot f'\big(h(x)\big)}$$

que l'on va appliquer 2 fois pour obtenir $g''(x)$.
On aura aussi besoin de savoir dériver un produit de fonctions:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Si une fonction est croissante, sa dérivée est positive.
Si une fonction est convexe, sa dérivée seconde est positive.

Retour énoncé

Indice Question 15

Rien de compliqué, un simple calcul de pourcentage …
Obtenir une réduction de x % consiste à multiplier le prix de base par $(1 - x)$

Retour énoncé

CORRECTIONS DÉTAILLÉES

Correction Question 1

Il est important de lire les indications si vous n'avez pas les idées claires concernant les compositions de fonctions !

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Donc, $(f \circ f)(x)$ consiste à réinjecter $f(x)$ à la place de x. Ce qui donne :

$$f\big(f(x)\big) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

Le dénominateur ne pouvant être nul, on doit avoir $2x+1 \neq 0$ soit : $\boldsymbol{x \neq -\frac{1}{2}}$.

Mais attention ! : Comme précisé dans l'énoncé, il faut **<u>aussi</u>** écarter $x = -1$ car dans ce cas la fonction f n'a même pas de sens et donc $f\big(f(x)\big)$ encore moins !

Le domaine de définition de $f \circ f$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{-1\,;\,-\frac{1}{2}\right\}$

La bonne réponse est la <u>réponse B</u>

[Retour énoncé]

Correction Question 2

$$\begin{cases}(t^2-9)x + (2t-6)y = 15 - t \\ (t+3)x + (t-3)y = t\end{cases}$$

Vous pourriez résoudre le système de manière générale (surtout quand vous voyez à la première ligne (t^2-9) qui se factorise en $(t-3)(t+3)$ et aussi $(2t-6)$ qui devient $2(t-3)$). Vous sentez que beaucoup de choses vont se simplifier. Mais dans un contexte d'examen, je vous le **déconseille** fortement ! En effet, une 'bête' erreur sera vite arrivée et vous aurez peu de moyen de vous en apercevoir à cause du paramètre $'t'$ qui vous cachera cette erreur. Sur cette question, je vous conseille donc de traiter les 4 propositions au cas par cas !

<u>Cas 1</u> : $t = -5$

Le système devient alors :

$$\begin{cases}16x - 16y = 20 \\ -2x - 8y = -5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x - 4y = 5 \\ 2x + 8y = 5\end{cases}$$

Qui ne présente aucune difficulté à résoudre ($x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{1}{4}$).

⇨ Le système admet une solution et donc la réponse A est FAUSSE

Cas 2 : $t = -3$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} 0\,x - 12y = 18 \\ 0\,x - 6y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \text{ et } \dots\ y = \frac{1}{2}$$ Ce système est tout simplement impossible !

⇨ Le système est impossible et donc la réponse B est FAUSSE

Cas 3 : $t = 1$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} -8x - 4y = 14 \\ 4\,x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -7 \\ 4\,x - 2y = 1 \end{cases}$$

Ce système, très simple à résoudre $\left(x = -\frac{3}{4}\ ; y = -2\right)$ admet donc bien une solution !

La bonne réponse est la réponse C

Sauf que …

Cas 4 : $t = 5$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} 16x + 4y = 10 \\ 8\,x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 5 \\ 8\,x + 2y = 5 \end{cases}$$

Ces 2 équations sont les mêmes ; les 2 droites sont donc parallèles ET confondues, rendant le système indéterminé et donc …

La bonne réponse est AUSSI la réponse D

Et voici donc pourquoi cette question a été dite « neutralisée », càd, ne comptant pas pour l'examen !

Retour énoncé

Correction Question 3

Pour cette question, il est complètement inutile d'utiliser la formule de la croissance exponentielle, contrairement à 100 % des corrigés que j'ai vu un peu partout. Le problème est bien plus simple !

J'ai au départ N cellules. 20 jours plus tard, la culture a doublé, j'ai donc 2N cellules (c'est juste l'énoncé …). Donc, 20 jours plus tard, la population a encore doublé et j'ai alors 4N cellules et encore 20 jours plus tard la population a encore doublé, ce qui me fait … 8N cellules ! Il s'est donc écoulé 60 jours pour que la population ait doublé d'un facteur 8. Terminé …

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

Correction Question 4

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Lisez bien les indications écrites pour cette question … cela vous amènera directement à la bonne réponse sans hésiter…

- Dans tous les cas, vous **éliminez directement la réponse D**. Un système de 2 équations à 2 inconnues n'admet JAMAIS 2 solutions distinctes vu que 2 droites ne se coupent JAMAIS en 2 endroits …
- Ensuite, l'énoncé ne vous interdit pas d'avoir $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$. Dans ce cas les 2 équations sont les mêmes et le système est donc indéterminé. Cela **élimine la réponse C** puisque le système n'admet pas TOUJOURS une infinité de solution, il ne l'admet QUE dans des cas particuliers : si $a_1 = k\,a_2$; $b_1 = kb_2$ et $c_1 = k\,c_2$.
- L'énoncé n'interdit pas non plus d'avoir $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ et $c_1 \neq c_2$. Vous auriez alors 2 droites parallèles et donc un système impossible. Ce qui **élimine la réponse A**, puisque cela veut dire que le système n'admet pas toujours une solution.

Il reste donc la réponse B qui est en effet la bonne (que vous devriez avoir trouvé immédiatement !). Il est bien précisé que les coefficients a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des nombres réels **non nuls**. Or, si $(0,0)$ pouvait être une solution du système, cela impliquerait que les 2 droites se croisent en $(0,0)$, càd que les **2** équations sont de la forme $y = ax$ càd encore, que le système serait de la forme :

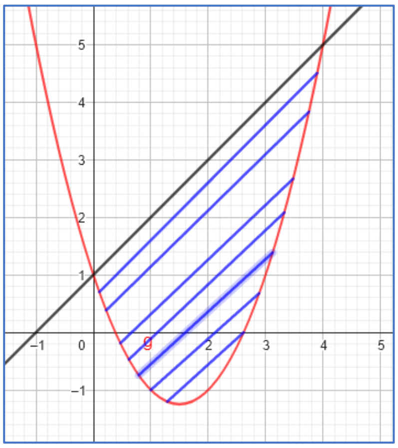
$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x \end{cases}$ or l'énoncé précise que c_1 et c_2 sont non nuls.

Donc, le système n'admet jamais $(0,0)$ comme solution

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

Correction Question 5



1) Tracer un graphe, même approximatif du problème.
2) Trouvez les 2 bornes d'intégration qui, d'après l'énoncé correspondent au 2 points d'intersection, càd, les 2 points d'abscisse où la droite et la parabole se rencontrent :

$$x + 1 = x^2 - 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 - x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

dont les solutions sont évidentes : $x = 0$ et $x = 4$.

3) Comme dit dans les indications, regardez quelle fonction est au-dessus de l'autre, ici il s'agit de $f(x) = x + 1$
4) La surface comprise entre les 2 fonctions sera alors :

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (x+1)\,dx - \int_0^4 (x^2 - 3x + 1)\,dx$$

que l'on peut bien sûr regrouper :

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (x + 1 - x^2 + 3x - 1)dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\left(\frac{64}{3}\right) + 4(8) = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

La bonne réponse est la réponse D

Note : Que serait-il arrivé si vous vous étiez « trompé » et aviez calculé

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (x^2 - 3x + 1)\, dx \; - \int_0^4 (x+1)\, dx$$

càd si vous aviez inversé fonction au-dessus et en-dessous ? Rien de bien grave en fait ! … Vous auriez obtenu comme réponse $-\frac{32}{3}$. Et comme une aire ne peut être que positive, il aurait suffit de prendre la valeur absolue pour retrouver $+\frac{32}{3}$.

Retour énoncé

Correction Question 6

$x = 1$ et $x = 3$ étant les 2 racines du polynôme, il peut se réécrire comme

$$P(x) = a(x-1)(x-3).$$

Ensuite, on exploite l'information $P(2) = 2$

⇨ $P(2) = a(2-1)(2-3) = 2 \quad \Leftrightarrow a \cdot 1 \cdot (-1) = 2 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

⇨ $P(x) = -2\,(x-1)(x-3)$ et donc, $P(0) = -2 \cdot (0-1)(0-3) = -6$

La bonne réponse est la réponse A

Retenez ABSOLUMENT qu'en connaissant les 2 racines x_1, x_2, on peut réécrire le polynôme sous la forme $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Vous gagnez … 1 page de calcul !

Sinon, comme je l'ai vu dans plusieurs autres corrigés incroyablement longs et compliqués, vous êtes embarqué pour un système à résoudre …

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

⇨ $P(1) = 0 \;\Leftrightarrow a + b + c = 0$
⇨ $P(3) = 0 \;\Leftrightarrow 9\,a + 3\,b + c = 0$
⇨ $P(2) = 2 \;\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 2$

Vous aurez donc à résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 9\,a + 3\,b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$$

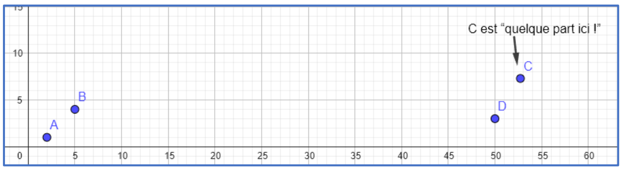
Rien de compliqué mais long et pénible, qui vous donnera $a = -2\,; b = 8\,; c = -6$.
⇨ $P(x) = -2x^2 + 8x - 6$ ce qui est bien la même chose que $-2(x-1)(x-3)$!

Mon astuce est plus simple, non ? 😉

Retour énoncé

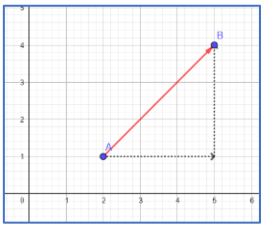
Correction Question 7

Comme d'habitude, faites une esquisse rapide mais propre et placez les points connus, quitte à ne pas être parfaitement à l'échelle à cause du point 'D' qui est loin … La solution va vous percuter les yeux !



Ayant placé les points A, B et D, vous devinez bien que le point cherché $'C'$ est quelque part un peu au dessus à droite de $'D'$ tout comme … 'B' est **de la même manière** un peu au-dessus à droite de $'A'$, puisque ce qu'on cherche, c'est à former un parallélogramme !

Zoomons sur les points A et B :



Vous voyez que pour aller de A à B, il faut aller 3 unités à droite puis monter de 3 unités en haut. De toute évidence, puisque le côté DC doit être parallèle et de même longueur que AB, il suffit de faire le même déplacement à partir du point D, pour obtenir les coordonnées du point C recherché !

D a comme coordonnées $D(50;3)$.

- 3 unités à droite : $50 + 3 = 53$ ➔ $\alpha = 53$
- 3 unités vers le haut : $3 + 3 = 6$ ➔ $\beta = 6$

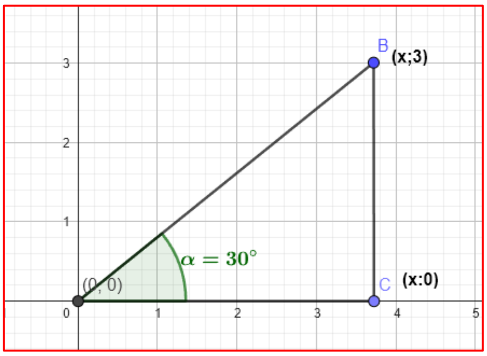
⇨ Le point C recherché est $C(53\,;6)$

La bonne réponse est la <u>réponse C</u>

Retour énoncé

Correction Question 8

Comme d'habitude, un graphe rapide mais propre vous fera gagner énormément de temps.



Grâce à l'une des trois seules lois des triangles rectangles qu'il vous est demandé de retenir, on voit immédiatement que :

$$\tan(\alpha) = \frac{BC}{CA}$$

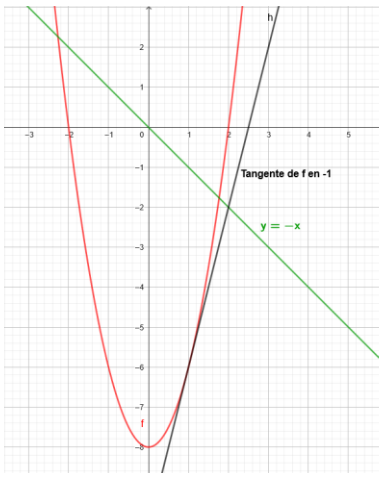
Or, $BC = 3$ et $AC = x$ ➔ $\tan(30) = \frac{3}{x}$ ➔ $\boldsymbol{x} = \frac{3}{\tan(30)} = \frac{3}{\frac{\sin(30)}{\cos(30)}} = \frac{3\cos(30)}{\sin(30)} = 3 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

La bonne réponse est la <u>réponse D</u>

[Retour énoncé]

Correction Question 9

On commence par visualiser le problème:



$$y = 2x^2 - 8$$

Or l'équation de la tangente en un point $\boldsymbol{a}$ est donnée par la définition même de la dérivée :

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

⇨ $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Ici, $y'(x) = 4x$ et $a = 1$

⇨ L'équation de la droite tangente en 1 est :

$$\boldsymbol{y} = f'(1)(x-1) + f(1) = 4(x-1) - 6 = \boldsymbol{4x - 10}$$

Le point d'intersection est donné par la solution du système:

$$\begin{cases} y = 4x - 10 \\ y = -x \end{cases}$$

⇨ $-x = 4x - 10 \;\Rightarrow x = 2 \;\Rightarrow y = -2.$

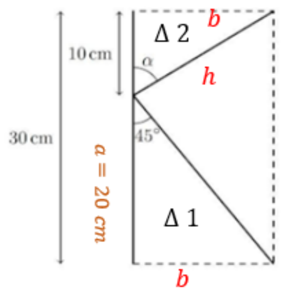
Donc, l'intersection des 2 droites d_1 et d_2 est $\mathbf{(2;-2)}$

La bonne réponse est la réponse C

Retour énoncé

Correction Question 10

On déduit immédiatement : $a = 30\ cm - 10\ cm = 20\ cm$



Par définition (dans le triangle $\Delta 1$) :

$$\frac{b}{a} = \tan(45°) \;\rightarrow\; b = 20\tan(45) = 20\ \frac{\sin(45)}{\cos(45)} = 20\ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20\ cm$$

(nb: ça n'est pas plus mal si vous retenez que $tan(45°) = 1$, ça vous fera gagner du temps !) ...

⇨ b est aussi la longueur du côté supérieur du triangle $\Delta\, 2$, c-à-d, 20 cm.

Par Pythagore, on déduit h: $h = \sqrt{(10)^2 + (20)^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

Et par la loi des sinus dans un triangle rectangle :

$h \sin\alpha = b \;\Rightarrow \boldsymbol{\sin\alpha} = \frac{b}{h} = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

La bonne réponse est la réponse C

nb: Il y a plein d'autres moyens ! J'ai volontairement utilisé cette méthode, légère ment plus longue, qui fait appel à moins de formules et pas de calculatrice !

Retour énoncé

Correction Question 11

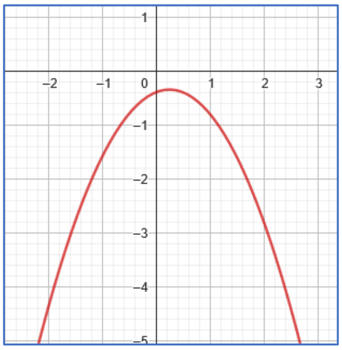
La série est la série statistique suivante : $-1\,, -x^2, 2x, -3x^2, -1.$
La moyenne est : $m = \frac{-1\,, -x^2, 2x, -3x^2, -1}{5} = \frac{-4x^2+2x-2}{5}$

Avant de se lancer dans une étude (même simple mais peut-être inutile) de parabole, calculons les racines. Attention, il est INUTILE de tenir compte du 1/5 pour effectuer le calcul des racines ! Multiplier un trinôme par 100 ou le diviser par 5 ne fait que changer la "largeur" de la parabole, mais **ne modifie en rien ses racines**.
Vous pouvez même écrire : $m = -\frac{2}{5}\,(2x^2 - x + 1)$ et en pas tenir compte du $-\frac{2}{5}$ pour le calcul des racines !
Les racines de $2x^2 - x + 1$ sont $m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$.
$\sqrt{-7}$ n'étant pas réel, on conclut que le trinôme, donc m, n'admet aucune racine quel que soit le réel x !

Ce qui nous évite d'aller plus loin car c'est une des réponses ! $m \neq 0$

La bonne réponse est la réponse D

Je note ici un **piège potentiel** (surtout dans le contexte stress et examen …). Imaginons que vous ayez tracer la parabole "grossièrement" en choisissant quelques points. Voici ce que vous auriez obtenu :



Et dans l'empressement répondre $m < -2$ est vrai car c'est vrai que pour **certains** $\boldsymbol{x}, m(x) < -2$ ou aussi que $m = -1$ est vrai car c'est vrai qu'en 2 points, $m = -1$. Mais attention, l'énoncé précise bien que la réponse doit être vraie QUEL QUE soit le nombre réel x et non pas pour certains x particuliers ! La seule vérité est que $m(x)$ n'a aucune racine quel que soit le réel x !

Retour énoncé

Correction Question 12

On commence par calculer l'équation de la droite. Elle passe par $(0{,}0)$. Son équation est donc forcément de la forme $y = ax$ où a représente la pente de la droite. Laquelle pente, pour 2 points de passage $(x_a; y_a)\,,(x_b; y_b)$ est donnée par :

$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad \text{, avec ici : } (x_a; y_a) = (0\,;0) \text{ et } (x_b; y_b) = (2\,;\,f(2))$$

Or, $f(2) = 2e^{\frac{4}{2}} = 2e^2$ ➔ $(x_b; y_b) = (2\,;\,2e^2)$

Donc la pente de la droite vaut $a = \frac{2e^2 - 0}{2 - 0} = \frac{2\,e^2}{2} = e^2$ et l'équation de la droite est:

$y = e^2\,x$

Comme dit dans les indications, regardez quelle fonction est au-dessus de l'autre, ici il s'agit de la droite $y = e^2\,x$

La surface comprise entre les 2 fonctions sera alors :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 e^2 x\,dx - \int_0^2 x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$$

La **première intégrale** est facile !

$$\int_0^2 e^2 x\,dx = e^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{e^2}{2}[x^2]_0^2 = 2e^2$$

La **deuxième intégrale** se fera par substitution ! Pour cet examen, elles seront toujours simples et en effet … remarquez immédiatement que la dérivée de $\frac{x^2}{2}$ n'est rien d'autre que x !

Le principe de base de l'intégrale par substitution est basé sur la dérivée d'une composée de 2 fonctions. TOUT est expliqué dans les indices de la question avec des exemples ! ;)

Ici, le bloc (voir indications) est $\frac{x^2}{2}$ et sa dérivée est donc x, qui par chance (…) se trouve dans l'intégrale aussi !

Donc : $\int_0^2 x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[e^{\frac{x^2}{2}}\right]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$

Pas clair ? alors décomposons:

$\frac{x^2}{2} = u$ ➔ $x\,dx = du$ ➔ $\int_0^2 x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_0^2 e^u\,du = [e^u]_0^2 = \left[e^{\frac{x^2}{2}}\right]_0^2$

Et finalement :

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \int_0^2 e^2 x\,dx - \int_0^2 x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = 2e^2 - e^2 + 1 = \boldsymbol{e^2 + 1}$$

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

Correction Question 13

Cette question revient chaque fois, je vous conseille de maitriser la moyenne pondérée pour aller plus vite, et seulement ensuite de vérifier votre réponse en l'appliquant !

Méthode 1 :

En français … : je mélange x ml de solution dont la concentration est 4 mg/100 ml, soit 0,04 mg/ml + y ml de solution dont la concentration est 9 mg/100 ml, soit 0,09 mg/ml. Je divise par la somme des ml obtenus (pour tout ramener à des mg/ml !) et je dois obtenir une concentration de 0.05 mg/ml. La contrainte est que la somme des ml obtenus vaut $x + y = 50\ ml$.

On a donc : $\frac{x \cdot 0{,}04 + y \cdot 0{,}09}{50} = 0{,}05$ soit : $0{,}04x + 0{,}09\,y = 2{,}5$

If faut donc résoudre le système : $\begin{cases} 0{,}04x + 0{,}09\,y = 2{,}5 \\ x + y = 50 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}04\,x + 0{,}09\,y = 2{,}5 \\ -0{,}04\,x - 0{,}04\,y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}09\,y - 0{,}04\,y = 0{,}5 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 10\ ml},$$

Et dès lors, $\boldsymbol{x = 40\ ml}$

La bonne réponse est la réponse D

Méthode 2 : Si vous êtes fâché avec les moyennes pondérées, il vous reste le moyen de tester une par une les différentes solutions …

N'oublions pas ce qu'on cherche !

Ce qu'on veut c'est 50 ml avec une concentration de 5 mg glucose / 100 ml, donc … **2,5 g de glucose dans mes 50 ml.**

Solution A : 10 ml / 40 ml

- 10 ml de solution à 4 mg glucose /100 ml ➔ 0.4 mg de glucose
- 40 ml de solution à 9 mg glucose /100 ml ➔ 3.6 mg de glucose

  Au total, j'ai 50 ml de solution avec 4 mg de glucose ➔ FAUX

Solution B : 20 ml / 30 ml

- 20 ml de solution à 4 mg glucose /100 ml ➔ 0.8 mg de glucose
- 30 ml de solution à 9 mg glucose /100 ml ➔ 2,7 mg de glucose

  Au total, j'ai 50 ml de solution avec 3,5 mg de glucose ➔ FAUX

Solution C : 25 ml / 25 ml

- 25 ml de solution à 4 mg glucose /100 ml ➔ 1 mg de glucose

- 25 ml de solution à 9 mg glucose /100 ml ➔ 2,25 mg de glucose
  Au total, j'ai 50 ml de solution avec 3,25 mg de glucose ➔ FAUX

Solution D : 40 ml / 10 ml

- 40 ml de solution à 4 mg glucose /100 ml ➔ 1,6 mg de glucose
- 10 ml de solution à 9 mg glucose /100 ml ➔ 0,9 mg de glucose
  Au total, j'ai 50 ml de solution avec 2,5 mg de glucose ➔ VRAI

Retour énoncé

Correction Question 14

Attention: ne tombez pas dans un piège ! Lorsqu'on vous dit $g(x) = f(x^2)$, personne n'a jamais dit que $g(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$!! (Je l'ai lu dans certaines corrigés ...). C'est peut-être $g(x) = \ln(x^2)$ ou $g(x) = 5 + 2\cos(x^2)$. Bref, vous ne savez rien de précis de la forme de $g(x)$. On reste donc général : $g(x) = f(x^2)$.
Ici clairement, la question va porter sur la dérivée de fonctions composées, càd, les fonctions de la forme $g(x) = f\big(h(x)\big)$ où dans notre cas, $h(x) = x^2$.
On sait que $\boldsymbol{g'(x) = h'(x) \cdot f'\big(h(x)\big)}$. On va l'appliquer 2 fois pour obtenir $g''(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x^2) \\ \Rightarrow \quad g'(x) &= (x^2)' \cdot f'(x^2) = 2x \cdot f'(x^2) \\ \Rightarrow g''(x) &= (2x)' \cdot f'(x^2) + 2x \cdot 2x \cdot f''(x^2) \\ &= 2\,f'(x^2) + 4x^2 \cdot f''(x^2) \end{aligned}$$

Nb rappel : $(fg)' = f'g + fg'$
Or :

- 2 est ... **positif** !
- $4\,x^2$ est toujours **positif**
- $f'(x^2)$ est toujours **positif** puisque l'énoncé précise que f est **croissante** !
- $f''(x^2)$ est toujours **positif** puisque l'énoncé précise que f est à **concavité tournée vers le haut** (convexe)

On conclut : $2\,f'(x^2) + 4x^2 \cdot f''(x^2)$ est donc toujours positive donc ... $g(x)$ est toujours > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$

La bonne réponse est la réponse D

Retour énoncé

Correction Question 15

Le prix de base est x **€.**

Avant réduction, le prix affiché est donc : $1{,}2\,x$ € , càd $20\,\%$ de plus que le prix de base.

Après réduction de 40 % sur le prix affiché (qui est $1{,}2\,x$), **la personne payera donc** :

$$(1 - 0{,}4) \cdot 1{,}2\,x = 0{,}6 \cdot 1{,}2 \cdot x = \mathbf{0{,}72\,x}$$

La bonne réponse est la réponse B

Retour énoncé

FIN