BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

Métropole JOUR 1

MATHÉMATIQUES

Code officiel : 24-MATJ1ME1

Mercredi 19 juin 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

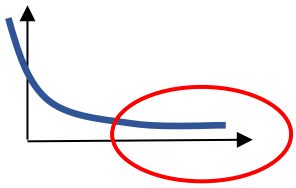
CORRIGÉ NON OFFICIEL par Laurent HARDY

Exercice 1

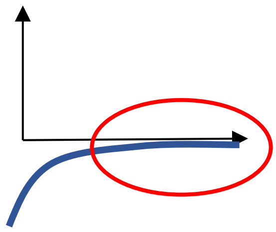
1.

Affirmation 1 : La fonction est $f(x) = 5x\,e^{-x}$. Sa courbe représentative est $\mathcal{C}_f$.

Demander si l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ revient à demander si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Autrement dit, est-on dans une situation de type :



ou



La réponse attendue est : « **L'affirmation 1 est vraie en vertu du théorème des 'croissances comparées' ».** En effet, dans votre cours, vous avez dû voir ce théorème, qui dit intuitivement qu'une exponentielle gagne toujours par rapport à n'importe quelle puissance. Ici, $f(x) = 5x\,e^{-x} = \frac{5x}{e^x}$. Lorsque $x \longmapsto \infty$, le numérateur grandit à une 'certaine vitesse' (ici linéaire car $5x$), MAIS le dénominateur grandit beaucoup plus vite car c'est une exponentielle. La fraction tend donc 'vite' vers 0 dès que x augmente.

Dès lors, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 5x\,e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x}{e^x} = 0$

- **L'affirmation 1 est vraie**.

Affirmation 2 : Il suffit de prendre $f(x) = 5x\,e^{-x}$, de l'injecter dans l'équation différentielle et de vérifier si l'égalité obtenue est vraie.

(E): $y' + y = 5\,e^{-x}$. A-t-on $(5x\,e^{-x})' + 5xe^{-x} \stackrel{?}{=} 5\,e^{-x}$?

Rappelons la formule générale de la dérivée de 2 fonctions u et v : $(uv)' = u'v + uv'$

Ici : $(5x\,e^{-x})' = (5x)' \cdot e^{-x} + 5x \cdot (e^{-x})' = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$.

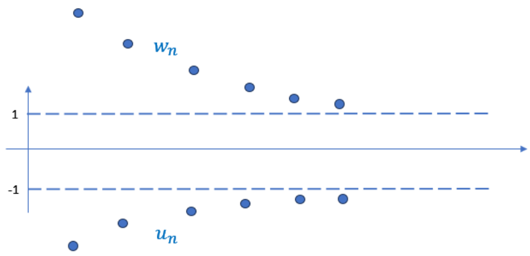
L'équation différentielle devient donc : $5e^{-x} - \cancel{5xe^{-x}} + \cancel{5xe^{-x}} \stackrel{?}{=} 5\,e^{-x} \Leftrightarrow 5\,e^{-x} \stackrel{?}{=} 5e^{-x}$.

On a bien $5\,e^{-x} = 5e^{-x}$ donc $f(x) = 5x\,e^{-x}$ est bien solution de l'équation différentielle (E) puisqu'après avoir injecté $f(x)$ dans l'équation, on obtient bien une égalité.

- **L'affirmation 2 est vraie**.

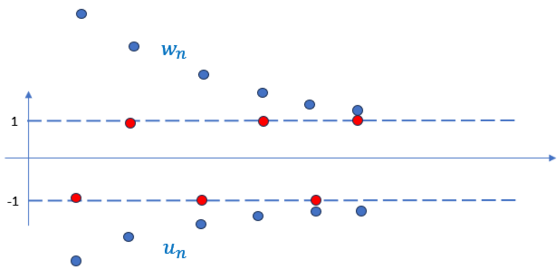
<u>Affirmation 3</u> :

On commence par visualiser l'énoncé, qui ressemble à ceci :



Il n'y a aucune raison pour qu'une suite coincée entre ces 2 suites converge elle-même vers un réel 'coincé' entre ces 2 suites.

L'exemple le plus simple est la suite $v_n = (-1)^n$ qui va sans arrêt osciller en prenant les valeurs -1 et 1 sans jamais converger :



Même chose avec les suites $v_n = \sin(n)$ ou $v_n = \cos(n)$, lesquelles vont osciller en permance entre -1 et +1 , sans jamais converger !

- **<u>L'affirmation 3 est fausse</u>**.

<u>Affirmation 4</u> :

Les informations sont :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$
- (u_n) est croissante, càd : $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n$
- (wn) est décroissante, càd : $w_0 \geq w_1 \geq \cdots \geq w_n$ ou encore : $w_n \leq w_{n-1} \leq \cdots \leq w_1 \leq w_0$

Donc, rassemblant ces 3 informations, nous avons :

$$\boldsymbol{u_0} \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \boldsymbol{v_n} \leq w_n \leq w_{n-1} \leq \cdots \leq w_1 \leq \boldsymbol{w_0}$$

Et donc, en particulier : $u_0 \leq v_n \leq w_0$ ■

- **<u>L'affirmation 4 est vraie</u>**.

Exercice 2

« Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes »

se traduit par :

$$P(I) = 0.6\,;P(M) = 0.3\,;P(G) = 0.1$$

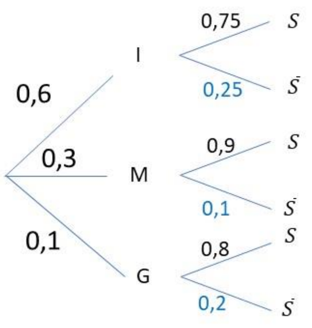
« Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface. »

se traduit par :

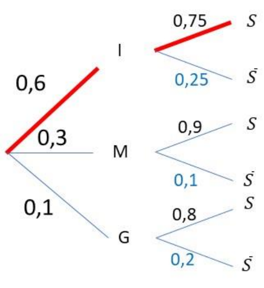
- P(satisfait si achat sur Internet)= $P_I(S) = 0.75$
- P(satisfait si achat en magasin électroménager)= $P_M(S) = 0.90$
- P(satisfait si achat en Grande surface)= $P_G(S) = 0.8$

1. De ces données, on construit l'arbre :
   (en noir, les données directes et en bleu, les données déduites (= 1 - donnée directe)

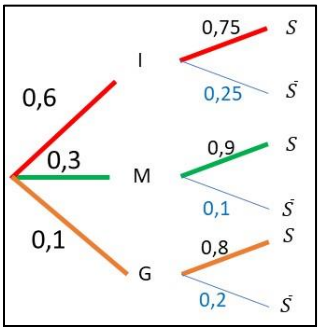


2. La probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet **ET** soit satisfait du service clientèle correspond au tracé rouge sur l'arbre :

   On doit calculer $P(I \cap S) = P(I) \cdot P_I(S) = 0.6 \times 0.75 = 0.45$



3. Cette question est une simple prolongation de la question précédente. Ici, on demande la probabilité d'être satisfait **quel que soit** l'endroit où a été acheté l'appareil.
Il faut donc faire la **somme** de toutes les branches qui amènent à « être satisfait », soit la somme des branches rouge, verte et orange.



Mathématiquement, puisque I, M et G forment une partition de l'univers, d'après la loi des probabilités totales, on a:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P(S)} &= P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) \\ &= P(I) \cdot P_I(S) + P(M) \cdot P_M(S) + P(G) \cdot P_G(S) \\ &= 0.6 \times 0.75 + 0.3 \times 0.9 + 0.1 \times 0.8 = \boldsymbol{0.8}\end{aligned}$$

4. On rephrase la question : Quelles est la probabilité qu'un client ait effectué son achat sur internet s'il est satisfait du service clientèle ?
Ce qui s'écrit mathématiquement : $P_S(I)$?
Or $P(I \cap S) = P(S) \cdot P_S(I) \Rightarrow P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0.45 \ \ (question\ 2)}{0.8 \ \ (question\ 3)} \approx 0{,}563$ à 10^{-3} près.

5. a) C'est bien une loi binomiale qui suit le schéma de Bernouilli car :
   - Lorsqu'on appelle un client, **2 issues seulement** sont possibles : il est satisfait (on lui associe la probabilité $P(S) = 0{,}8$ ou il ne l'est pas (auquel cas, on lui associe la probabilité $P(\bar{S}) = 0{,}2$
   - Chaque appel, répété 30 fois, est une **épreuve indépendante** de la précédente (on précise « tirage avec remise » dans l'énoncé).

   Donc, la variable aléatoire X, qui compte le nombre de clients satisfait sur une journée, suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(\mathbf{30}\,;\mathbf{0,8})$

   b) Il s'agit donc de déterminer $P(X \geq 25)$ dans le cadre de $\mathcal{B}(\mathbf{30}\,;\mathbf{0,8})$.

   Or, $P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - \ P(X \leq 24)$

   A ce niveau, pas d'autre choix que d'utiliser votre calculatrice qui est censée être programmée pour ce calcul ou aller dans une table de la loi binomiale qui vous indiquera que $P(X \leq 24)$ pour $\mathcal{B}(30\,;0{,}8) = 0{,}57249$.

   Donc $P(X \geq 25) = 1 - \ P(X \leq 24) = 1 - 0.57249 \approx 0.428$

   En français : La probabilité pour qu'au moins 25 clients soient satisfaits sur un échantillon de 30 clients appelés dans la journée est environ 0.428 ou encore 42.8 %.

6. Dans ce cas, l'issue « positive » est « ne pas être satisfait » pour lequel la probabilité associée est $P(\text{ne pas être satisfait}) = P(\bar{S}) = 0{,}2$.

   L'échantillon est de n personnes (à calculer) pour que $P(Y) \geq 0{,}99$ dans le cadre d'une loi binomiale $\mathcal{B}(\boldsymbol{n}\,;\boldsymbol{0{,}2})$ où Y est la variable aléatoire qui représente le nombre de clients non satisfaits parmi les n clients appelés en une journée.

   Donc, on doit calculer $P(Y \geq 1) \geq 0{,}99$.

   Or, $P(Y \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(Y < 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0{,}99$.

   Or, pour une binomiale $\mathcal{B}(\boldsymbol{n}\,;\boldsymbol{0{,}2})$;

$$P(Y = 0) = C_n^0\,(0{,}2)^0\,(0{,}8)^{n-0} = 1 \times 1 \times 0{,}8^n = 0{,}8^n$$

$$\Rightarrow P(Y \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow -0{,}8^n \geq -0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01$$

On se débarrasse de l'exposant n en passant au logarithme népérien ln :

$$\Rightarrow \ln(0{,}8)^n \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01)$$

On veut passer $\ln(0{,}8)$ à droite mais attention, **énorme piège (!)** : $\ln(0{,}8)$ est **négatif** (car $\ln(x) < 0$ si $0 < x < 1$) , il faut donc penser à inverser l'inégalité !

- $n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}64$. n devant être un nombre entier, on obtient : $\boldsymbol{n \geq 21}$.

Il faut donc appeler au moins 21 clients pour avoir une probabilité supérieure à 0,99 que l'un d'entre eux ne soit pas satisfait.

7. **a)** Une des propriétés des espérances de variables aléatoires sur un même univers est que : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

   Ici on a donc simplement : $\boldsymbol{E(T)} = \boldsymbol{E(T_1 + T_2)} = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = \boldsymbol{7}$

   De même si X et Y sont 2 variables indépendantes sur un même Univers, on a $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

   Ici : $\boldsymbol{V(T)} = \boldsymbol{V(T_1)} + \boldsymbol{V(T_2)} = 2 + 1 = \boldsymbol{3}$

   b) Dès qu'on vous demande de calculer une probabilité dont le résultat est «$\geq$ » à une valeur, et que juste avant, on vous a fait calculer une espérance et une variance, il faut immédiatement penser à la relation qui existe entre ces 3 propriétés et il s'agit de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev qui énonce :

Soit X, une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors pour tout réel a strictement positif, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.

La question posée est : que vaut $P(5 \leq T \leq 9)$? Pour se « raccrocher » à l'inégalité de Tchebychev, on va soustraire $E(T)$ partout !

- $P(5 \leq T \leq 9)$

$$= P\big(5 - E(T) \leq T - E(T) \leq 9 - E(T)\big) \overset{E(T)=7}{=} P(-2 \leq T - E(T) \leq 2)$$

$= P(|T - E(T)| \leq 2) = 1 - P(|T - E(T)| > 2) = 1 - P(|T - E(T)|) \geq 3)$

(« ≥ 3 », car T étant un nombre de jours, c'est un entier, ainsi que $E(T)$. Donc $T - E(T)$ est un entier et si un entier est > 2, c'est qu'il est forcément ≥ 3 …).

Or, l'inégalité de Tchebychev stipule dans notre cas :

$P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{3\,(=V(T))}{9\,(=3^2)} = \frac{1}{3}$

Et donc, en résumé : $P(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}$

Nb : Le signe « $\geq$ » vient de :

$P(5 \leq T \leq 9) = 1 - P(|T - E(T)| \geq 3)$

➔ $P(|T - E(T)| \geq 3) = 1 - P(5 \leq T \leq 9) \leq \frac{1}{3}$

➔ $-P(5 \leq T \leq 9) \leq -\frac{2}{3}$

➔ $\boldsymbol{P(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}}$

Donc, la probabilité que le téléviseur arrive chez le client entre 5 et 9 jours suivant la commande est supérieure à 2/3 ■

Exercice 3

1. a) Dans la partie « Orthogonalité d'une droite et un plan » de votre cours, vous avez vu la propriété suivante :

   Une droite $\boldsymbol{d}$ est **orthogonale à un plan** signifie qu'elle est orthogonale à **TOUTE** droite de ce plan.

   Propriété : Une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$si, et seulement si, elle est orthogonale à **deux droite sécantes** de ce plan. Autrement dit, une droite $\boldsymbol{d}$ de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de ce plan tels que $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ et $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.

   Partant des points C, A et D, calculons :

   $\overrightarrow{CA}=(5;5;0)-(0;0;10)=(5;5;-10)$ et

   $\overrightarrow{CD}=\left(0;0;-\frac{5}{2}\right)-(0;0;10)=(0;0;-\frac{25}{2})$

   Ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires. En effet il n'est pas possible de trouver λ tel que $(5\,;5\,;-10)=\lambda\left(0\,;0\,;-\frac{25}{2}\right)$.

   Ensuite, on vérifie le produit scalaire avec le vecteur $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$:

   - $\overrightarrow{CA}\cdot\vec{n}_1=5\times1+5\times(-1)+(-10)\times0=0$ ➔ $\vec{n}_1$ est bien $\perp$ à $\overrightarrow{CA}$
   - $\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}_1=0\times1+0\times(-1)+\left(-\frac{25}{2}\right)\times0=0$ ➔ $\vec{n}_1$ est bien $\perp$ à $\overrightarrow{CD}$

     Donc, $\vec{n}_1$ étant perpendiculaires à 2 droites non colinéaires du plan CAD, $\boldsymbol{\vec{n}_1}$ **est perpendiculaire au plan $\boldsymbol{CAD}$**.

   b) L'équation d'un plan s'écrit $ax+by+cz+d=0$ où a, b et c sont le coefficient directeur du vecteur normal à ce plan. Ici, puisque $\vec{n}_1$ vaut $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, on a :

   $a=1\,;b=-1\,;c=0$ qui mène à l'équation du plan : $x-y+d=0$

   Or, on a par exemple A qui appartient au plan, donc :

   $x_A-y_A+d=0\ \Leftrightarrow 5-5+d=0\ \Rightarrow d=0$

   L'équation du plan est donc : $\boldsymbol{x-y=0}$

   Note : Vous pouviez savoir que $d=0$ sans le calculer ! En effet, d représente la distance du plan à l'origine du repère. Or, vous voyez que les points C et D sont sur l'axe Z. Le plan passe donc obligatoirement par l'axe Z et donc la distance du plan à $(0\,;0\,;0)$ vaut 0, donc $d=0$.

2. a) Le point H appartient donc **à la fois** à la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

et au plan CAD d'équation $x - y = 0$ (voir question 1). Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \quad (1) \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \quad (2) \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \quad (3) \\ x - y = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$(4) \Rightarrow x = y \quad \Rightarrow (1) = (2) \quad \Rightarrow \frac{5}{2}t = 5 - \frac{5}{2}t \quad \Rightarrow 5t = 5 \quad \Rightarrow t = 1$

Si $t = 1\,; x = \frac{5}{2}\,; y = \frac{5}{2}\,; z = 0.$

Le point d'intersection $\boldsymbol{H}$ du plan $\boldsymbol{CAD}$ et de la droite $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est donc bien $\boldsymbol{H}\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

b) On a $B(0;5;0)$ et $H(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0) \Rightarrow$ On a alors :

$$\overrightarrow{BH} = \left(\frac{5}{2} - 0\,;\frac{5}{2} - 5\,;0 - 0\right) = \left(\frac{5}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\,;0\right)$$

Cette droite est colinéaire avec $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ (car $\left(\frac{5}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\,;0\right) = \frac{5}{2} \times (1;-1;0)$

Or, on sait que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan CAD, donc $\overrightarrow{BH}$ l'est aussi. Dès lors, le point H qui appartient au plan CAD (voir (a)) est bien le projeté orthogonal de B sur le plan CAD.

3. a) Si ABH est rectangle en H, cela veut dire que $\overrightarrow{AH}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{BH}$, càd que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0.$

   Or $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{5}{2} - 5;\frac{5}{2} - 5;0 - 0\right) = (-\frac{5}{2};-\frac{5}{2};0)$ et $\overrightarrow{BH} = \left(\frac{5}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\,;0\right)$.

   Donc, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \cdot 0 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$

   $\Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BH}$ et donc, ABH est bien un triangle rectangle en H.

   b) L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle est donné par la formule générale : $\frac{(Base)\times(Hauteur)}{2}$.

Prenons $\overrightarrow{AH}$ comme base et $\overrightarrow{BH}$ comme hauteur (l'inverse est parfaitement valable aussi et ne change rien !) et calculons la longueur de chaque segment.

$$|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25 \times 2}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{BH}| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25 \times 2}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Et donc $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \times \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right) = \mathbf{\frac{25}{4}}$ ■

4. a) Si tel est le cas, il faut alors que $\overrightarrow{CO}$ soit perpendiculaire au plan formé par ABH**,** la base du tétraèdre. Et pour cela, il suffit que $\overrightarrow{CO}$ soit $\perp$ à deux droites non-colinéaires de ce plan ABH : choisissons $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AH}$ car nous les avons déjà calculés ci-dessus (on aurait pu choisir aussi $\overrightarrow{AB}$ …).

   $\overrightarrow{OC} = (0-0; 0-0; 10-0) = (0; 0; 10)$ (rien de surprenant, O étant l'origine …)

   - $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BH} = (0) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + (0) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 10 \cdot 0 = 0$
   - $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AH} = (0) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + (0) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 10 \cdot 0 = 0$
   - $\Rightarrow \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BH} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \perp$ *plan qui contient* ABH, la base du tétraèdre, donc $\overrightarrow{OC}$ est bien la hauteur du tétraèdre. ■

   b) L'aire de la base est connue (question 3b) : $\mathcal{A} = \frac{25}{4}$

   La hauteur $h = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (10)^2} = 10$ (évident …)

   Le volume vaut donc : $\boldsymbol{\mathcal{V}_{ABCH}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 = \mathbf{\frac{125}{6}}$

5. Plusieurs méthodes sont possibles mais ici, l'énoncé précise de se baser sur les raisonnements précédents. Le principe va être d'exploiter la question 4 à l'envers, en choisissant une autre base et une autre hauteur …
   En effet : $\boldsymbol{\mathcal{V}_{ABCH}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times h = \frac{125}{6}$
   Mais prenons cette fois comme base, le **triangle** $\boldsymbol{ABC}$**,** rectangle en B (admis dans l'énoncé, mais très simple à démontrer). La surface du triangle vaut donc : $\mathcal{A} = \frac{(Base) \times (Hauteur)}{2}$ où on prend $\overrightarrow{AB}$ comme base et $\overrightarrow{BC}$ comme hauteur.
   Or :
   - $\overrightarrow{AB} = (0-5; 5-5, 0-0) = (-5; 0; 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 5$
   - $\overrightarrow{BC} = (0-0; 0-5, 10-0) = (0; -5; 10)$
     $\Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(0)^2 + (-5)^2 + (10)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$\Longrightarrow$ La surface du triangle ABC vaut donc :

$$\mathcal{A} = \frac{(Base) \times (Hauteur)}{2} = \mathcal{A} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \times \left|\overrightarrow{BC}\right|}{2} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sqrt{5} = \frac{25}{2}\sqrt{5}$$

Or, le volume du tétraèdre vaut $\boldsymbol{\mathcal{V}_{ABCH}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d$ où d est précisément la hauteur passant par $H,$ perpendiculaire au plan $ABC,$ et dont la valeur n'est rien d'autre que ce qu'on cherche : la distance de H au plan ABC !

Donc : $\boldsymbol{\mathcal{V}_{ABCH}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times d \Rightarrow \boldsymbol{d} = \frac{3 \times \mathcal{V}_{ABCH}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{3 \times \frac{125}{6}}{\frac{25}{2}\sqrt{5}} = \frac{3 \times 125 \times 2}{6 \times 25 \times \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

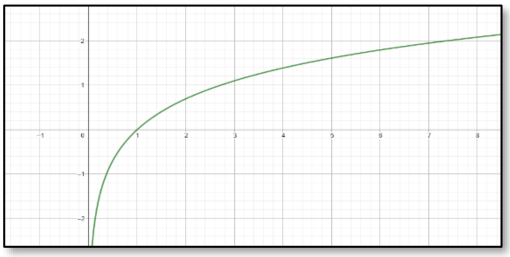
La distance du point $\boldsymbol{H}$ au plan $\boldsymbol{ABC}$ vaut $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

Exercice 4

Partie A :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$$

Rappelons aussi (mais, attention, vous **devez** le savoir pour le BAC), l'allure de la fonction $\ln x$:



1. a) $\lim\limits_{x \to 0} x - 2 + \frac{1}{2}\ln x = ?$

- $\lim\limits_{x \to 0} x - 2 = -2$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}\ln x = -\infty$

$\Rightarrow$ par sommation : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} x - 2 + \frac{1}{2}\ln x = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 + \frac{1}{2}\ln x = ?$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\ln x = +\infty$

$\Rightarrow$ par sommation : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 + \frac{1}{2}\ln x = +\infty}$

b) $\left(x - 2 + \frac{1}{2}\ln x\right)' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \boldsymbol{\frac{2x+1}{2x}}$

c) Pour ce cas simple, un tableau de variation n'est pas nécessaire (ceci dit, personne ne vous interdit de le faire au brouillon …)

En effet :

Sur $]0; +\infty[$, $2x + 1$ est toujours > 0 et d'autre part, $2x$ est toujours > 0 également. Donc $f'(x) = \frac{2x+1}{2x} > 0$ sur $]0; +\infty[$. Donc, la fonction f est **strictement croissante sur** $\boldsymbol{]0; +\infty[}$.

d) Rappelons que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Donc, $\boldsymbol{f''(x)} = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2x+1}{2x}\right)' = \frac{2 \cdot 2x - (2x+1) \cdot 2}{4x^2} = \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} = -\frac{2}{4x^2} = \boldsymbol{-\frac{1}{x^2}}$

Sur $]0;+\infty[$, $-\frac{1}{x^2}$ est toujours < 0. **La fonction $f(x)$ est donc concave** (tournée vers le bas) sur $]0;+\infty[$.

2. a) La question (1 a) informe que $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, ainsi que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La question (1 c) informe que $f(x)$ est **strictement** croissante sur $]0;+\infty[$.
Utilisant un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en conclut de ces 3 informations que $f(x)$ traverse une fois l'axe des abscisses (car elle vient de $-\infty$ pour aller vers $+\infty$) et qu'elle ne le fait **qu'une et une seule fois** (car elle est **strictement** croissante). Dès lors, $f(x)$ une unique solution, nommée α sur $]0;+\infty[$.

- $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln(1) = -1$ qui est négatif.
- $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2)$ qui est positif car $\ln(x) > 0\ \forall x \in]1,+\infty[$

  Dès lors, puisque $f(x)$ passe de négative à positive sur l'intervalle $[1,2]$, on conclut que $\alpha \in [1,2]$.

b) Puisque $f(x)$ est strictement croissante et que α est son unique racine, il vient forcément que :

- $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0,\alpha[$
- $f(x) = 0$ en $x = \alpha$
- $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$

c) Puisque α est racine de $f(x)$, on a $f(\alpha) = 0$.
Soit : $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha) = 2\cdot(2-\alpha)$

Partie B :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$$

1. $\boldsymbol{g'(x)} = -\frac{7}{8}\cdot(2x) + 1 - \frac{1}{4}\,(x^2\ln x)' = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}(2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x})$

$$= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{4}x$$

$$= \boldsymbol{-2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x}$$

Or, $x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x\cdot(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)) = x\cdot(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\cdot(\ln 1 - \ln x))$

$$= x\cdot(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}(0 - \ln x))$$

$$= x\cdot(\frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2}\ln x)$$

$$= 1 - 2x - \frac{1}{2}x\ln x = g'(x)$$

On a donc bien $g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$

2. a) Puisque $x \in \left]0\,,\frac{1}{\alpha}\right]$, on a : $0 < x < \frac{1}{\alpha}$ et donc, $\alpha < \frac{1}{x}$.

Or, on sait que $f(x)$ est strictement croissante sur $]0, \infty]$ et donc, une propriété est que : *si $f(x)$ est croissante, alors si $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.*

Dans notre cas, $\alpha < \frac{1}{x} \Rightarrow f(\alpha) < f\left(\frac{1}{x}\right)$ or, nous savons (question 2c-partie I) que $f(\alpha) = 0$, donc $0 < f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a bien $\boldsymbol{f(x) > 0}$. ■

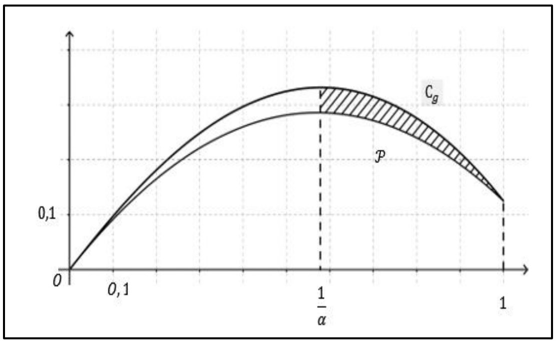
b) On se base sur la réponse de la question (1), laquelle est : $g'(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$

On rajoute, au tableau donné et admis dans l'énoncé, le signe de la fonction $f(x) = x$. Par multiplication des signes, on déduit le tableau de variation de $g'(x)$ et de là, le tableau de variation de $g(x)$.

x	**0**		$\frac{1}{\alpha}$		**1**
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	|	+	0	-	
Signe de x	|	+	+	+	
Signe de $g'(x)$	|	+	0	-	
Variation de $g(x)$	||	↗		↘	

Partie C : a)

- $\mathcal{C}_g = g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$
- $\mathcal{P} : y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur $]0\,;1]$



$$\mathcal{C}_g \overset{?}{>} \mathcal{P} \Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x \overset{?}{>} -\frac{7}{8}x^2 + x \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2\ln x \overset{?}{>} 0$$

Sur $]0\,;1]$, on a :

- $-\frac{1}{4} < 0$
- $x^2 > 0$

- $\ln x < 0$
  Donc, multipliant les signes on a bien $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 \ln x > 0$, ce qui justifie que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{P}$ sur $]0\,;1]$.

b) Il faut calculer

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, dx$$

A cé niveau de terminales, la méthode qui s'impose est l'intégration par parties dont le principe est :

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv = \int u'v + \int uv' \Rightarrow \int u'v = uv - \int uv'$$

Choisissons : $u' = x^2$, alors $u = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$v = \ln x,$ alors $v' = \frac{1}{x}$

Et donc :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left[0 - \frac{1}{3\alpha^3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right] - \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3\alpha^3}\ (\ln 1 - \ln \alpha)\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \left[-\frac{1}{3\alpha^3}\ (0 - \ln \alpha)\right] - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha^3}\right) = \frac{\ln \alpha}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

$$= \frac{3\ln \alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

Or, on sait par ailleurs (partie A.2.c) que $\ln(\alpha) = 2 \cdot (2 - \alpha)$,

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, dx = \frac{3\ln \alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} = \frac{3 \cdot 2\,(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} = \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

$$= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} \quad \blacksquare$$

FIN